

Einige differentialgeometrische Untersuchungen  
des Dirac - Operators einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor scientiae naturalium ( Dr. sc. nat. )

vorgelegt dem

Senat des Wissenschaftlichen Rates  
der Humboldt - Universität zu Berlin

von

Dr. rer. nat. Thomas Friedrich  
geb. am 12. 10. 1949 in Leipzig .

Rektor: Prof. Dr. sc. Klein

Gutachter:

1. Prof. Dr. habil. R. Sulanke ( Berlin )
2. Prof. Dr. habil. P. Günther ( Leipzig )
- 3.

Berlin ,

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung.	3
2. Definition und grundlegende Eigenschaften des Dirac - Operators.	7
2.1. Die Spin - Darstellung $\Delta$ .	7
2.2. Die Definition des Dirac-Operators.	10
2.2. Die lokale Darstellung der kovarianten Ableitung im Spinorbündel.	13
2.4. Die Abhängigkeit des Dirac-Operators vom Zusammenhang.	16
3. Die Abhängigkeit des Dirac - Operators von der Spin-Struktur.	23
3.1. Die Deformation zweier Spin - Strukturen	23
3.2. Anwendung der Deformation von Spin - Strukturen auf die assoziierten Spinorbündel.	29
3.3. Die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin - Struktur.	34
3.4. Spin - Strukturen homogener Räume.	42
3.5. Anhang.	48
4. Einige Spektraleigenschaften des Dirac-Operators.	50
4.1. Die Fundamentallösung und die Zeta- Funktion eines elliptischen Operators.	50
4.2. Die Konstruktion der Fundamentallösung der zum Dirac-Operator gehörigen Wärme- leitungsgleichung.	54

4.3. Berechnung der ersten Koeffizienten in der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion von $D^2$ .	63
4.4. Einige Anwendungen der Asymptotenentwicklung	72
4.5. Berechnung der Koeffizienten $d_0, d_1, d_2$ nach einer Methode von P. Gilkey.	76
5. Zur Existenz paralleler Spinorfelder.	79
5.1. Wodurch tritt der Ricci-Tensor im Spinorbündel auf ?	79
5.2. Parallele Spinorfelder.	80
5.3. Parallele Spinoren und der Kern des Dirac-Operators.	87
6. Literaturverzeichnis.	93

## 1. Einleitung

Besitzt eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit  $X^n$  eine Spin-Struktur, so wird im assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  durch kovariante Ableitung und Cliffordmultiplikation ein elliptischer Differentialoperator erster Ordnung, der sogenannte Dirac-Operator, definiert. Dieser trat mit Ausarbeitung der Theorie elliptischer Differentialoperatoren auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten Anfang der 60-iger Jahre in das Blickfeld mathematischer Betrachtungen und diente zunächst als Beispiel eines nichtklassischen Operators, an welchem die dort erzielten Resultate illustriert wurden. Danach setzte man ihn häufig als dankbares Hilfsmittel in Untersuchungen charakteristischer Klassen, beim Studium von Fixpunktmengeu gewisser Transformationsgruppen und in der Darstellungstheorie Liescher Gruppen ein. In diesem Zusammenhang begann eine nähere Untersuchung der Eigenschaften dieses Operators, welcher auch die vorliegende Arbeit gewidmet ist.

Nachdem wir zu Beginn des zweiten Kapitels die zur Behandlung des Dirac-Operators notwendigen algebraischen und geometrischen Tatsachen kurz zusammengestellt haben, definieren wir diesen Operator, welcher von der Geometrie des zugrundeliegenden Raumes  $X^n$ , einem Zusammenhang  $Z$  im zu  $X^n$  assoziierten  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel  $Q$  und einer Spin-Struktur  $(P, \lambda)$  von  $Q$  abhängt. Danach geben wir eine lokale Beschreibung der vom Zusammenhang  $Z$  induzierten kovarianten Ableitung  ${}^Z \nabla^{\mathcal{Y}}$  im Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  an, die nach Cliffordmultiplikation den Dirac-Operator ergibt. Im letzten Abschnitt dieses einleitenden Kapitels beantworten wir vollständig die Frage, auf welche Weise der Dirac-Operator vom gewählten Zusammenhang abhängt. Dabei zeigt es sich zum Beispiel, daß unterschiedliche Zusammenhänge von  $Q$  durchaus den gleichen Dirac-Operator liefern können. Insbesondere entscheiden wir, wann

der zum Zusammenhang  $Z$  gehörige Dirac-Operator  $D^Z$  ein formal-selbstadjungierter Operator ist. Obwohl eine Reihe von Überlegungen der nachfolgenden Kapitel auch für einen beliebigen, metrischen Zusammenhang Gültigkeit haben, setzen wir von Beginn des dritten Kapitels eingedenk dieser erhaltenen Beschreibung der Abhängigkeit des Operators  $D^Z$  vom Zusammenhang  $Z$  voraus, daß  $Z$  der Levi-Civita-Zusammenhang des Riemannschen Raumes ist.

Im dritten Kapitel der Arbeit studieren wir den Einfluß der Spin-Struktur auf den Dirac-Operator. Alle Spin-Strukturen der Mannigfaltigkeit  $X^n$  sind - nach Festlegen einer ersten Spin-Struktur - durch die Elemente der ersten Kohomologiegruppe  $H^1(X^n; Z_2)$  klassifiziert. Daher ist die Differenz zweier Spin-Strukturen als Element in  $H^1(X^n; Z_2)$  eine absolute Größe. Diese läßt eine Interpretation als Paar  $(R, \xi)$  bestehend aus einem  $SO(n) \times Z_2$ -Hauptfaserbündel  $R$  und einer zweifachen Überlagerung  $\xi: R \rightarrow Q$  von  $R$  auf das zur Riemannschen Mannigfaltigkeit assoziierte  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel  $Q$  zu, welches wir die Deformation der betrachteten Spin-Strukturen nennen. Geht man von den vorliegenden Spin-Strukturen zu den assoziierten Spinorbündeln über, so unterscheiden diese sich durch eine tensorielle Multiplikation mit dem Vektorbündel  $E = R \times_{SO(n) \times Z_2} R^1$ , welches auch dadurch charakterisiert wird, daß seine erste Stiefel-Whitney-Klasse gleich der Differenz der kohomologisch interpretierten Spin-Strukturen in  $H^1(X^n; Z_2)$  ist. Dem zur zweiten Spin-Struktur gehörigen Dirac-Operator  $D_2$  entspricht bei dieser Identifikation der Vektorbündel der Operator  $1 \otimes_{\nabla E} D_1$ , wobei die kovariante Ableitung  $\nabla^E$  in  $E$  durch die Hebung des Zusammenhangs mittels der Überlagerung  $\xi: R \rightarrow Q$  erhalten wird. Danach drücken wir das Quadrat  $(D_2)^2$  in Abhängigkeit von  $(D_1)^2$  und einem Rest  $A_1 + A_0$  von Operatoren erster beziehungsweise nullter Ordnung aus und zeigen, wie die behandelte Methode

des Vergleiches zweier Dirac-Operatoren unterschiedlicher Spin-Strukturen am Beispiel des flachen Torus arbeitet. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels illustrieren wir weiterhin die erhaltene Identifikation am Beispiel reductiver, homogener Riemannscher Räume mit homogenen Spin-Strukturen.

Im vierten Kapitel der vorliegenden Arbeit untersuchen wir einige Spektraleigenschaften des Dirac-Operators. Wir beschreiben dabei den Weg, daß wir das asymptotische Verhalten der Zeta-Funktion  $\zeta(t)$  des Operators  $D^2$  nahe  $t=0$  betrachten. Sind  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow +\infty$  die Eigenwerte von  $D^2$  und  $m_0, m_1, \dots$  die Dimensionen der entsprechenden Eigenunterräume, so wird  $\zeta(t)$  einerseits durch

$$\zeta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}$$

definiert. Andererseits erhält man aus der Fundamentallösung  $E(x, y, t)$  des Cauchy-Problems der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + D^2 \right) \psi(x, t) &= 0 \\ \psi(x, 0) &= \psi_1(x) \end{aligned}$$

die Funktion  $\zeta(t)$  als Spur von  $E$ :

$$\zeta(t) = \int_{X^n} E(x, x, t) dx$$

Daher geben wir eine Konstruktion der Fundamentallösung  $E(x, y, t)$  an, welche die Geometrie des Spinorbündels, insbesondere die in ihm induzierte kovariante Ableitung und Parallelverschiebung benutzt, und berechnen daraus die ersten Koeffizienten der Asymptotenentwicklung von  $\zeta(t)$  in Abhängigkeit von den Krümmungsgrößen des Riemannschen Raumes. Demnach wenden wir uns der Frage zu, welche Größen einer Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit durch die Spektren des Laplace-Operators  $\Delta$  und des Operators  $D^2$  zusammen determiniert werden. Neben Resultaten über gewisse Klassen 4-dimensionaler

Mannigfaltigkeiten, in denen die Eulersche Charakteristik, die Signatur bzw. das arithmetische Geschlecht durch diese Spektren bestimmt werden, erhalten wir Anwendungen auf n-dimensionale Räume konstanter Schnittkrümmung, Insbesondere sind die Sphäre  $S^n$  und der reell-projektive Raum  $P^{4k+3}(R)$  in der Klasse aller Spin-Mannigfaltigkeiten durch die Spektren von  $\Delta$  und  $D^2$  bis auf Isometrie festgelegt.

Das letzte Kapitel dieser Arbeit ist der Existenz paralleler Spinorfelder gewidmet. Vor allem gelingt es uns, mittels der absoluten Differentiation  $D^\psi$ , den Ricci-Tensor Ric des Riemannschen Raumes  $X^n$  über die Formel

$$\sum_{i=1}^n s_i \cdot D^\psi D^\psi \psi(t, s_i) = -\frac{1}{2} Ric(t) \cdot \psi$$

natürlicherweise im Spinorbündel zu reproduzieren. Somit sind wir in der Lage, aus der lokalen Existenz paralleler Spinorfelder auf das Verschwinden des Ricci-Tensors zu schließen, woraus in einigen Fällen bereits Flachheit des Riemannschen Raumes folgt. Das Spinorbündel über einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X^4$  zerfällt in die Summe  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ + \mathcal{Y}^-$ . Wir beweisen weiterhin, daß  $X^4$  flach ist, falls parallele Spinoren in  $\mathcal{Y}^+$  und  $\mathcal{Y}^-$  existieren. Insbesondere folgt aus der Existenz eines parallelen Vektorfeldes und eines parallelen Spinorfeldes auf  $X^4$  die Flachheit dieses Raumes. Danach wenden wir uns Schnitten der Form  $t \cdot \psi$  zu, wobei  $\psi$  ein paralleles Spinorfeld und  $t$  ein solches Vektorfeld ist, dessen entsprechende 1-Form  $w^t$  harmonisch ( $dw^t = 0 = \delta w^t$ ) ist, und zeigen, daß  $t \cdot \psi$  im Kern des Dirac-Operators liegt. Für kompakte Spin-Mannigfaltigkeiten mit nichttrivialem, parallelem Spinorfeld erhalten wir dann eine Abschätzung der Dimension des Kerns des Dirac-Operators von unten durch die Hälfte der ersten Betti-Zahl der Mannigfaltigkeit.

2. Definition und grundlegende Eigenschaften des Dirac-Operators

2.1. Die Spin-Darstellung  $\Delta$

Wir stellen zuerst einige algebraischen Fakten zusammen, welche wir zur Definition des Dirac-Operators und dessen Untersuchung benötigen. Dabei verweisen wir auf [18], [27] und [31].

Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine orthonormale Basis des euklidischen Raumes  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  und bezeichne  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^n)$  die Clifford-Algebra der Bilinearform  $(\mathbb{R}^n, -\langle, \rangle)$ . Diese ist  $2^n$ -dimensional und wird multiplikativ von den Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  erzeugt, wobei die Relationen

$$e_i \circ e_i = -1$$

$$e_i \circ e_j + e_j \circ e_i = 0 \quad i \neq j$$

gelten. Die Komplexifizierung  $\text{Cliff}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$  dieser Algebra ist isomorph zur Matrizenalgebra  $\mathbb{C}(2^k)$ , falls  $n = 2k$  eine gerade Zahl ist, beziehungsweise isomorph zur Algebra  $\mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k)$ , falls  $n = 2k+1$  eine ungerade Zahl ist (vergl. [18]). Wir geben eine derartige Isomorphie  $\mathcal{A}$  direkt an. Bezeichne

$$E_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \text{ ungerade} \\ 2 & \text{falls } j \text{ gerade} \end{cases}$$

so ist eine Isomorphie  $\mathcal{A} : \text{Cliff}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2k}) \longrightarrow \mathbb{C}(2^k)$  durch die Zuordnung

$$e_j \longrightarrow E \otimes \dots \otimes E \otimes E \otimes \underbrace{\alpha(j) \otimes T \otimes \dots \otimes T}_{[(j-1)/2] \text{-mal}}$$

gegeben. Eine Isomorphie  $\mathcal{A} : \text{Cliff}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2k+1}) \longrightarrow \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k)$  erhält man mittels



$$e_j \longrightarrow ( E \otimes \dots \otimes E \otimes E \otimes \alpha(j) \otimes T \otimes \dots \otimes T , \\ E \otimes \dots \otimes E \otimes E \otimes \alpha(j) \otimes T \otimes \dots \otimes T )$$

für  $1 \leq j \leq 2k$  und

$$e_{2k+1} \longrightarrow ( i T \otimes \dots \otimes T , -i T \otimes \dots \otimes T ) .$$

Sei  $\xi: \text{Spin}(n) \longrightarrow \text{SO}(n)$  die zweifache Überlagerung der speziellen, orthogonalen Gruppe  $\text{SO}(n)$ . Die Gruppe  $\text{Spin}(n)$  ist in  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^n)$  enthalten und wird hier von allen Elementen der Form  $x \cdot y$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $|x| = |y| = 1$  multiplikativ erzeugt. Schränken wir  $\mathcal{D}$  auf  $\text{Spin}(n)$  ein und projizieren wir im Fall  $n = 2k + 1$  noch auf die erste Achse, so erhalten wir eine komplexe,  $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ -dimensionale Darstellung  $\Delta_n$  der Gruppe  $\text{Spin}(n)$

$$\mathcal{D}: \text{Spin}(n) \longrightarrow \text{GL}(\Delta_n) ,$$

welche für  $n \equiv 1 \pmod{2}$  irreduzibel ist und im Fall  $n \equiv 0 \pmod{2}$  in zwei irreduzible Komponenten  $\Delta_n = \Delta_n^+ + \Delta_n^-$  zerfällt.

Der Kern von  $\mathcal{D}$  ist in beiden Fällen trivial,  $\text{Ker}(\mathcal{D}) = e$ .

Die Multiplikation eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^n$  mit einem Spinner

$\psi \in \Delta_n$  wird dadurch definiert, daß man mittels  $\mathbb{R}^n \subset \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^n)$  den Vektor  $v$  als Homomorphismus  $v: \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$  deutet und ihn auf  $\psi$  anwendet. Wirkt  $\text{Spin}(n)$  über  $\xi$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,

so ist diese Multiplikation  $\mu: \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$

ein Homomorphismus der entsprechenden Spin-Darstellungen. Im

Fall  $n = 2k$  vertauscht  $\mu$  die Zerlegung  $\Delta_n = \Delta_n^+ + \Delta_n^-$

und induziert somit zwei Homomorphismen

$$\mu^+: \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n^+ \longrightarrow \Delta_n^-, \quad \mu^-: \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n^- \longrightarrow \Delta_n^+ .$$

Anstatt  $\mu(v \otimes \psi)$  schreiben wir einfach  $v \cdot \psi$ . Wegen  $v \cdot v = -|v|^2$  in  $\text{Cliff}^0(\mathbb{R}^n)$  folgt aus  $v \cdot \psi = 0$ , daß  $\psi$  oder  $v$  gleich Null ist.

Die Lie-Algebra spin(n) der Gruppe  $\text{Spin}(n)$  kann mit der linearen Hülle der Menge  $\{e_i \cdot e_j : i < j\}$  in  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^n)$

identifiziert werden. Ist  $E_{ij}$  die Standardbasis der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(n)$ , so ist unter Verwendung dieser Identifikation das Differential

$$\mathfrak{S}_* : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n) \text{ gegeben durch } \mathfrak{S}_*(e_i e_j) = 2E_{ij}.$$

Für das Differential der Darstellung  $\mathfrak{R} : \text{Spin}(n) \longrightarrow \text{GL}(\Delta_n)$  gilt  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_*$  (vergl. [27]).

Wir geben nun eine Basis  $u(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$  des Vektorraumes  $\Delta_n$  ( $n = 2k, 2k+1$ ) mit  $\epsilon_i = \pm 1$  an. Diese erhält man mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

durch

$$u(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = u_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes u_{\epsilon_k}.$$

Die Basis  $u(\dots)$  ist so konstruiert, daß im Fall  $n = 2k$  der Vektorraum  $\Delta_n^+$  von allen  $u(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$  mit

$\epsilon_1 \dots \epsilon_k = 1$  aufgespannt wird, während die restlichen Basis-elemente  $\Delta_n^-$  erzeugen. Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt

$$T(u_{\epsilon}) = -\epsilon u_{\epsilon}$$

$$S_{\alpha}(j)(u_{\epsilon}) = (-1)^{j-1} \epsilon^{\alpha(j)} \epsilon^{\alpha(j+1)} u_{-\epsilon}.$$

Abschließend bemerken wir noch, daß  $\Delta_n$  ein hermitesches Produkt mit der Eigenschaft

$$(x \circ \psi, \psi^r) + (\psi, x \circ \psi^r) = 0$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\psi, \psi^r \in \Delta_n$  besitzt, welches wir immer benutzen wollen, sofern wir von einem solchen in  $\Delta_n$  sprechen (vergl. [27]).

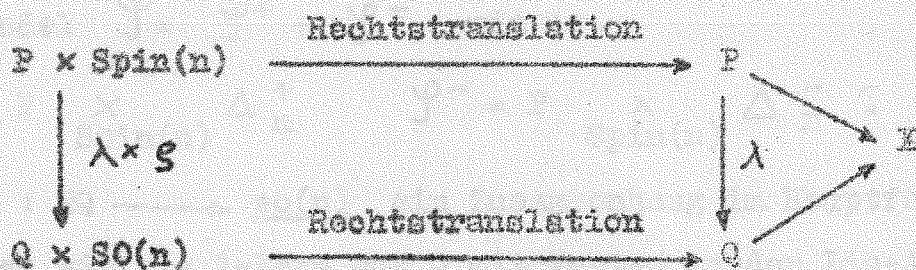
Aus  $(x \circ y \circ \psi, x \circ y \circ \psi^r) = (\psi, y \circ x \circ y \circ \psi^r) = (\psi, \psi^r)$  für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x| = |y| = 1$  folgt dann

$$(\mathfrak{R}(z)\psi, \mathfrak{R}(z)\psi^r) = (\psi, \psi^r) \quad z \in \text{Spin}(n)$$

und somit wird  $\mathfrak{R} : \text{Spin}(n) \longrightarrow \text{GL}(\Delta_n)$  eine unitäre Darstellung.

2-2. Die Definition des Dirac-Operators.

Es sei  $(Q, \pi, X; SO(n))$  ein  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel über einem topologischen Raum  $X$ . Die Zahl  $n$  betrage hier und in der gesamten Arbeit mindestens drei. Eine Spin-Struktur des betrachteten  $SO(n)$ -Hauptfaserbündels  $Q$  ist ein Paar  $(P, \lambda)$  - bestehend aus einem  $Spin(n)$ -Hauptfaserbündel  $P$  und einer zweifachen Überlagerung  $\lambda : P \longrightarrow Q$  - für welches das folgende Diagramm kommutativ ist



Ist  $X$  ein endlicher, zusammenhängender CW-Komplex, so besitzt  $Q$  genau dann eine Spin-Struktur, falls die zweite Stiefel-Whitney-Klasse  $w_2(W)$  des zu  $Q$  assoziierten Vektorbündels  $W = Q \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n$  verschwindet. In diesem Fall werden alle Spin-

Strukturen von  $Q$  - bis auf Isomorphie - durch die Elemente der ersten Kohomologiegruppe  $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$  des Raumes  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_2$  klassifiziert. (vergl. [24], [25]; siehe auch Kapitel 3 dieser Arbeit).

Wir betrachten nun eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit  $X^n$  der Dimension  $n \geq 3$  und bezeichnen mit  $Q$  das assoziierte  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel. Unter einer Spin-Struktur der Mannigfaltigkeit  $X^n$  verstehen wir eine Spin-Struktur des Bündels  $Q$ . Wir setzen voraus, daß die betrachtete Riemannsche Mannigfaltigkeit eine Spin-Struktur besitzt und fixieren eine solche.

Mit  $\mathcal{Y}$  bezeichnen wir das zu  $P$  mittels der Darstellung  $\mathcal{D} : Spin(n) \longrightarrow GL(\Delta_n)$  assoziierte Vektorbündel:

$$\mathcal{Y} = P \times_{Spin(n)} \Delta_n$$

Weil die Clifferämultiplikation  $\mu : \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$  ein Homomorphismus der Spin(n)-Darstellungen ist und des Tangentialbündel  $TX^n$  von  $X^n$  in der Form

$$TX^n = Q \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n = P \times_{Spin(n)} \mathbb{R}^n$$

dargestellt werden kann, induziert  $\mu$  einen Vektorbündelhomomorphismus  $\mu : TX^n \otimes \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ . Auch hier schreiben wir  $v \cdot \psi$  anstatt  $\mu(v \otimes \psi)$ . Im Fall  $n = 2k$  zerfällt  $\mathcal{Y}$  gemäß der Aufspaltung  $\Delta_n = \Delta_n^+ + \Delta_n^-$  in die Summe zweier Vektorbündel  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ + \mathcal{Y}^-$  mit

$$\mathcal{Y}^+ = P \times_{Spin(n)} \Delta_n^+ \quad \mathcal{Y}^- = P \times_{Spin(n)} \Delta_n^-$$

Sei  $Z : TQ \longrightarrow \underline{so(n)}$  ein Zusammenhang im Hauptfaserbündel  $Q$ , welchen wir als 1-Form auf  $Q$  mit Werten in der Lie-Algebra  $\underline{so(n)}$  auffassen (vergl. [32]).  $Z$  hebt sich natürlicherweise zu einem Zusammenhang  $\hat{Z} : TP \longrightarrow \underline{spin(n)}$  im Hauptfaserbündel  $P$  so, daß

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\hat{Z}} & \underline{spin(n)} \\ \downarrow \lambda_* & & \downarrow \xi_* \\ TQ & \xrightarrow{Z} & \underline{so(n)} \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist. Der Zusammenhang  $Z$  ergibt im Tangentialbündel  $TX^n$  eine kovariante Ableitung

$$Z \nabla : \Gamma(TX^n) \longrightarrow \Gamma(T^*X^n \otimes TX^n),$$

während  $\hat{Z}$  im Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  eine kovariante Ableitung

$$Z \nabla^{\mathcal{Y}} : \Gamma(\mathcal{Y}) \longrightarrow \Gamma(T^*X^n \otimes \mathcal{Y})$$

induziert. Hierbei steht  $\Gamma(\cdot)$  für den Raum aller glatten Schnitte in dem entsprechenden Vektorbündel. Ist  $Z$  der Levi-Civita-Zusammenhang der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $X^n$ , so schreiben wir einfach  $\nabla, \nabla^{\mathcal{Y}}$  anstelle  $Z \nabla, Z \nabla^{\mathcal{Y}}$ . Wir bemerken weiterhin, daß  $Z$  eine absolute Differentiation  $D^{\mathcal{Y}}$  im Bündel  $\mathcal{Y}$  definiert, welche jeder p-Form mit Werten in  $\mathcal{Y}$

eine  $(p+1)$ -Form mit Werten in  $\mathcal{Y}$  zuordnet. Letztlich ergibt  $\hat{\tau}$  eine Parallelverschiebung

$$\tau_\gamma: \mathcal{Y}_{\gamma(a)} \longrightarrow \mathcal{Y}_{\gamma(b)}$$

im Spinorbündel entlang einer Kurve  $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

Wir kommen nun zur Definition des Dirac-Operators  $D^Z$ . Die Metrik auf der Mannigfaltigkeit gestattet es, das Tangentialbündel  $T\mathbb{R}^n$  mit dem Kotangentialbündel  $T^*\mathbb{R}^n$  zu identifizieren.  $D^Z$  wird dann als Superposition folgender Abbildungen definiert:

$$\Gamma(\mathcal{Y}) \xrightarrow{Z \nabla \mathcal{Y}} \Gamma(T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{Y}) = \Gamma(T\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{Y}) \xrightarrow{\mu} \Gamma(\mathcal{Y}) .$$

Lokal haben wir mit einem Reper  $(s_1, \dots, s_n)$  von orthonormalen Vektorfeldern und einem Schnitt  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  die Formel

$$D^Z(\psi) = \sum_{i=1}^n s_i \circ Z \nabla_{s_i} \psi ,$$

in welcher "  $\circ$  " für die Cliffordmultiplikation steht. Ist  $Z$  der Levi-Civita-Zusammenhang, so schreiben wir wiederum einfach  $D$ . Ist  $n = 2k$  eine gerade Zahl, so erhalten wir auf die gleiche Weise zwei Operatoren

$$(D^Z)^+ : \Gamma(\mathcal{Y}^+) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{Y}^-) , (D^Z)^- : \Gamma(\mathcal{Y}^-) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{Y}^+) .$$

In dieser Form trat der Dirac-Operator mit Ausarbeitung der Theorie elliptischer Differentialoperatoren auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten Anfang der 60-iger Jahre in das Blickfeld der mathematischen Betrachtung (vergl. [26]). Er wurde danach häufig als dankbares Hilfsmittel in Untersuchungen charakteristischer Klassen (vergl. [23]), beim Studium von Fixpunkt mengen gewisser Transformationsmengen (vergl. [1]) und in der Darstellungstheorie Liescher Gruppen (vergl. [19], [27], [35] u. a.) angewandt. Eine bemerkenswerte Arbeit erschien von N. Hitchin 1974 (vergl. [17]), in welcher gezeigt wird, daß die Dimension des Kerns von  $D$  eine von der Geometrie des Raumes abhängige Größe ist. Wir wollen an dieser Stelle nur zwei Eigenschaften des

Dirac-Operatoren anführen, welche wir benötigen. Erstens ist  $D^2$  ein elliptischer Differentialoperator erster Ordnung. Über kompakten Mannigfaltigkeiten verschwindet sein Index. Dagegen verschwindet der Index der Operatoren  $D^+$ ,  $D^-$  im Fall gerader Dimension im allgemeinen nicht (vergl. [4]). Zweitens bewies A. Lichnerowicz (vergl. [17], [22]), daß im Fall des Levi-Civita-Zusammenhangs das Quadrat  $D^2$  in der Form

$$D^2(\psi) = \frac{1}{4} R \psi - \sum_{i=1}^n \nabla_{s_i}^{\psi} \nabla_{s_i}^{\psi} \psi - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\psi} \psi$$

darstellbar ist, wobei  $R$  die Skalarkrümmung des Raumes  $X^n$  ist. Insbesondere ergibt sich hieraus, daß für  $R \geq 0$ ,  $R \neq 0$  und  $X^n$  kompakt der Kern des Operators  $D$  trivial ausfällt.

### 2.3. Die lokale Darstellung der kovarianten Ableitung im Spinorbündel.

Es sei  $s = (s_1, \dots, s_n) : V \rightarrow Q$  ein lokales Reper von orthonormalen Vektorfeldern über einer einfach-zusammenhängenden, offenen Menge  $V \subset X^n$ . Der Zusammenhang  $Z$  induziert eine lokale Zusammenhangsform  $Z^s = Z \circ s_* : TV \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ . Mittels

$$Z^s = \sum_{i < j} \omega_{ij} E_{ij}$$

erhalten wir 1-Formen  $\omega_{ij}$  ( $i < j$ ) auf  $V$ , welche wir durch Antisymmetrie  $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$  für beliebige Indizes definieren können. Für die kovariante Ableitung  $Z \nabla$  im Tangentialbündel gilt dann

$$Z \nabla_{s_i} s_j = \sum_{l=1}^n \omega_{jl}(s_i) s_l.$$

Der Schnitt  $s : V \rightarrow Q$  hebt sich zu einem Schnitt  $\hat{s} : V \rightarrow P$  und wir können die lokale Zusammenhangsform  $\hat{Z}^{\hat{s}} = \hat{Z} \circ \hat{s}_*$  betrachten. Für sie gilt

$$\hat{z} \hat{s} = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i e_j$$

Ist  $u(\varepsilon)$  eine (beliebige) Basis des Spin-Moduls  $\Delta_n$ , so erhalten wir durch  $\eta(\varepsilon) = [\hat{s}, u(\varepsilon)]$  linear unabhängige Schnitte  $\eta(\varepsilon)$  in  $\mathcal{Y}$  über  $V$ . Dann gilt (vergl. [32])

$$\begin{aligned} Z \nabla_t^{\mathcal{Y}} \eta(\varepsilon) &= [\hat{s}, \mathcal{L}_* (\hat{z} \hat{s}(t)) u(\varepsilon)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(t) [\hat{s}, \mathcal{L}_* (e_i e_j) u(\varepsilon)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(t) (s_i s_j) \cdot \eta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Andererseits ist  $Z \nabla^{\mathcal{Y}}$  durch ein System von Formen  $\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$  mit

$$Z \nabla^{\mathcal{Y}} \eta(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon'} \Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \eta(\varepsilon')$$

darstellbar. Wir berechnen die Formen  $\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$  in dem Fall, daß die Basis  $u(\varepsilon)$  gleich der im Abschnitt 2.1. eingeführten Basis  $u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  ist. Sei

$$c_{1m} = (-1)^{[(1-1)/2] + [(m-1)/2] + m} \alpha(1+1) + \alpha(m)+1$$

Aus der Definition von  $\mathcal{L}$  sowie der Elemente  $u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  erhält man mit  $n = 2k, 2k+1$  folgende Formeln für

$$\mathcal{L}_* (e_1 e_m) = \mathcal{L}(e_1 e_m) :$$

a.) Ist  $[(1-1)/2] < [(m-1)/2]$  und  $m < 2k+1$ , so

$$(e_1 e_m) u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = c_{1m} \varepsilon_{k-[(m-1)/2]}^{\alpha(m+1)} \varepsilon_{k-[(1-1)/2]}^{\alpha(1)}$$

$$\varepsilon_{k-[(m-1)/2]+1} \dots \varepsilon_{k-[(1-1)/2]-1}$$

$$u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-[(m-1)/2]}, \dots, \varepsilon_{k-[(1-1)/2]}, \dots, \varepsilon_n)$$

Das Vorzeichen der  $\varepsilon$ -Serie ändert sich dabei genau an zwei Stellen.

b.) Ist  $1 < m < 2k+1$  und  $\left[ \frac{(1-1)/2}{2} \right] = \left[ \frac{(m-1)/2}{2} \right]$ , so

$$\mathcal{L}(e_1 \circ_m) u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = i \varepsilon_{k - \left[ \frac{(1-1)/2}{2} \right]} u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

c.) Ist  $1 < 2k+1$ , so

$$\mathcal{L}(e_1 \circ_{2k+1}) u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = (-1)^{k - \left[ \frac{(1-1)/2}{2} \right] + 1} i \alpha(1) + 1$$

$$\cdot \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k - \left[ \frac{(1+1)/2}{2} \right]} \varepsilon_{k - \left[ \frac{(1-1)/2}{2} \right]}$$

$$\cdot u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k - \left[ \frac{(1-1)/2}{2} \right]}, \dots, \varepsilon_k)$$

Das Vorzeichen der  $\varepsilon$ -Serie ändert sich dabei genau an einer Stelle.

Nach elementaren Rechnungen erhalten wir dann

Satz 1 (vergl. [13]) :

Sei  $\dim X^n = 2k$  gerade. Die die kovariante Ableitung  $\nabla^f$  lokal beschreibenden Formen  $\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$  sind gegeben durch:

1.  $\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'} = 0$ , falls die  $\varepsilon'$ -Serie nicht durch genau zwei oder null Vorzeichenveränderungen aus der  $\varepsilon$ -Serie hervorgeht.

2. 
$$\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2} i \sum_{l=1}^k \omega_{2l-1, 2l} \varepsilon_{n-1+l}$$

3. 
$$\frac{\Gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-t}, \dots, \varepsilon_{k-s}, \dots, \varepsilon_k}}{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} = \frac{\varepsilon_{k-t+1} \dots \varepsilon_{k-s-1}}{2}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & c_{2s+1, 2t+1} \varepsilon_{k-s} \omega_{2s+1, 2t+1} + c_{2s+2, 2t+1} \omega_{2s+2, 2t+1} + \\ & + c_{2s+1, 2t+2} \varepsilon_{k-t} \varepsilon_{k-s} \omega_{2s+1, 2t+2} + \\ & + c_{2s+2, 2t+2} \varepsilon_{k-t} \omega_{2s+2, 2t+2} \end{aligned} \right\}$$

Sei  $\dim X^n = 2k+1$  ungerade. Dann gilt:

4.  $\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'} = 0$ , falls die  $\varepsilon'$ -Serie nicht durch genau null, eine oder zwei Vorzeichenveränderungen aus der  $\varepsilon$ -Serie hervorgeht.

5. Ist  $\varepsilon = \varepsilon'$  oder unterscheidet sich  $\varepsilon'$  durch zwei Vorzeichen von  $\varepsilon$ , so gelten die Formeln der Punkte 2. und 3.



$$6. \int \begin{matrix} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k-t} & - & \varepsilon_{k-t} \dots \varepsilon_k \\ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \end{matrix} = \frac{1}{2} (-1)^{k-t-1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k-t-1} \varepsilon_k$$

$$\circ (\varepsilon_{k-t} \omega_{2t+1, 2k+1} - i \omega_{2t+2, 2k+1}) \circ$$

2.4. Die Abhängigkeit des Dirac-Operators vom Zusammenhang.

In diesem Abschnitt der Arbeit untersuchen wir, auf welche Weise der Dirac-Operator vom gewählten Zusammenhang  $Z$  abhängt.

Wir betrachten den Algebromorphismus

$$\sigma_n: \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Hom}(\Delta_n, \Delta_n),$$

welcher im Fall  $n = 2k$  gleich  $\mathcal{D} : \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(2^k) = \text{Hom}(\Delta_n, \Delta_n)$

ist, während für  $n = 2k+1$   $\sigma_n$  durch  $\sigma_n = \text{pr}_1 \circ \mathcal{D}$

$$\text{Cliff}^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{C}(2^k) + \mathcal{C}(2^k) \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{C}(2^k) = \text{Hom}(\Delta_n, \Delta_n)$$

definiert ist. Mit  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\psi \in \Delta_n$  gilt natürlich

$$v \circ \psi = \mu(v \otimes \psi) = \sigma_n(v)(\psi)$$

$\sigma_{2k}$  ist eine Isomorphie. Wir bestimmen den Kern von  $\sigma_{2k+1}$ .

Lemma 1: Der Kern von  $\sigma_{2k+1}$  besteht genau aus denjenigen

Elementen  $x \in \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^{2k+1})$ , welche sich in der Form

$$x = y_1 + y_2 e_{2k+1} \text{ mit } y_1, y_2 \in \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^{2k}) \text{ und}$$

$$y_1 + i^{k+1} y_2 e_1 \dots e_{2k} = 0 \text{ darstellen lassen. Insbesondere ist der}$$

Kern von  $\sigma_{2k+1}$  disjunkt mit dem von den Elementen  $e_i$  und

$e_i e_j e_1$  ( $i < j < 1$ ) gemeinsam aufgespannten Unterraum.

Beweis: Wir kennzeichnen in diesem Beweis die Dimension des

Raumes, zu welcher  $\mathcal{D}$  gehört und schreiben  $\mathcal{D}_n$ . Aus der Kon-

struktion von  $\mathcal{D}$  ergibt sich die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^{2k}) & \xrightarrow{\mathcal{X}_{2k}} & \mathcal{O}(2^k) = \text{Hom}(\Delta_{2k}, \Delta_{2k}) \\ \downarrow & & \downarrow d \\ \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^{2k+1}) & \xrightarrow{\mathcal{X}_{2k+1}} & \mathcal{O}(2^k) \oplus \mathcal{O}(2^k) \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{O}(2^k) = \text{Hom}(\Delta, \Delta) \end{array}$$

unmittelbar, in welchem  $d$  die Diagonalabbildung ist. Das Element  $x \in \text{Cliff}^0(\mathbb{R}^{2k+1})$  stellen wir in der Form  $x = y_1 + y_2 e_{2k+1}$  dar und dann müssen wir zeigen, dass  $\text{pr}_1 \circ \mathcal{X}_{2k+1}(x) = 0$  gleichwertig mit  $y_1 + i^{k+1} y_2 e_1 \dots e_{2k} = 0$  ist. Aus

$$\text{pr}_1 \mathcal{X}_{2k+1}(x) = 0$$

$$\text{folgt } \text{pr}_1(\mathcal{X}_{2k}(y_1) + \mathcal{X}_{2k}(y_2) \mathcal{X}_{2k+1}(e_{2k+1})) = 0$$

und somit

$$\mathcal{X}_{2k}(y_1) + i \mathcal{X}_{2k}(y_2) \cdot (\mathbb{T} \otimes \dots \otimes \mathbb{T})_n = 0$$

Wegen

$$\mathcal{X}_{2k}(e_1 \dots e_{2k}) = (-i)^k \mathbb{T} \otimes \dots \otimes \mathbb{T}$$

erhalten wir

$$\mathcal{X}_{2k}(y_1 + i^{k+1} y_2 e_1 \dots e_{2k}) = 0$$

und daher  $y_1 + i^{k+1} y_2 e_1 \dots e_{2k} = 0$ . Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Mit  $\langle , \rangle$  bezeichnen wir die Metrik auf  $X^n$ . Wir betrachten zwei Zusammenhänge  $Z_1$  und  $Z_2$  sowie die ihnen entsprechenden kovarianten Ableitungen  $\nabla_{Z_1}$ ,  $\nabla_{Z_2}$  im Bündel  $TX^n$ . Dann ist

$A(U, V) = \nabla_{Z_1} \nabla_U V - \nabla_{Z_2} \nabla_U V$  ein  $(2,1)$ -Tensor mit der Eigenschaft

$$\langle A(U, V), W \rangle = - \langle A(U, W), V \rangle$$

Einen  $(3,0)$ -Tensor  $K$  erhalten wir durch

$$K(U, V, W) = \langle A(U, V), W \rangle + \langle A(V, W), U \rangle + \langle A(W, U), V \rangle$$

Mittels einer direkten Rechnung zeigt man

Lemma 2:  $K$  ist eine 3-Form, d.h.

$$K(U, V, W) + K(V, U, W) = 0$$

$$K(U, V, W) + K(U, W, V) = 0$$

Die Zusammenhänge  $Z_1, Z_2$  induzieren Divergenzoperatoren

$$\operatorname{div}^{Z_j}(U) = \sum_{i=1}^n \langle Z_j \nabla_{s_i} U, s_i \rangle \quad j = 1, 2$$

Satz 2: Der Operator  $D^{Z_1}$  ist gleich dem Operator  $D^{Z_2}$  genau dann, wenn die beiden Bedingungen

$$\operatorname{div}^{Z_1} = \operatorname{div}^{Z_2} \quad \text{und} \quad K = 0$$

erfüllt sind.

Beweis: Wir betrachten die Differenz  $D^{Z_1} - D^{Z_2}$ . Wegen

$$(D^{Z_1} - D^{Z_2})(f \psi) = f(D^{Z_1} - D^{Z_2})(\psi)$$

für  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  und  $f: X^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist diese Differenz ein Bündelmorphismus von  $\mathcal{Y}$ . Somit genügt es,  $(D^{Z_1} - D^{Z_2})$  auf den Basis-

schnitten  $\eta(\varepsilon) = [\hat{s}, u(\varepsilon)]$  lokal zu berechnen. Wir erhalten

$$(D^{Z_1} - D^{Z_2})(\eta(\varepsilon)) = \sum_{i=1}^n s_i \circ (Z_1 \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \eta(\varepsilon) - Z_2 \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \eta(\varepsilon)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{1 < l < m} (\omega_{lm}^{Z_1}(s_i) - \omega_{lm}^{Z_2}(s_i)) (s_i s_l s_m) \circ \eta(\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\operatorname{div}^{Z_1} - \operatorname{div}^{Z_2})(s_j) \circ s_j \circ \eta(\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i < j < k} K(s_i, s_j, s_k) (s_i s_j s_k) \circ \eta(\varepsilon)$$

Ist nun  $\operatorname{div}^{Z_1} = \operatorname{div}^{Z_2}$  und  $K = 0$

so folgt  $D^{Z_1} = D^{Z_2}$  unmittelbar. Aus  $D^{Z_1} = D^{Z_2}$  erhalten wir andererseits

$$\sum_{j=1}^n (\operatorname{div}^{Z_1}(s_j) - \operatorname{div}^{Z_2}(s_j)) s_j + \sum_{i < j < k} K(s_i, s_j, s_k) s_i s_j s_k = 0$$

in  $\operatorname{Kern}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ , woraus wir im Fall gerader Dimension der Mannigfaltigkeit sofort  $\operatorname{div}^{Z_1} = \operatorname{div}^{Z_2}$  und  $K = 0$  schließen können.

Ist die Dimension der Mannigfaltigkeit ungerade, so erhalten wir

unter Verwendung von Lemma 1 das gleiche Ergebnis. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkung: Aus dem Beweis ersieht man daß  $K = 0$  gleichwertig damit ist, daß es ein Vektorfeld  $V$  auf  $X^n$  mit

$$(D^{Z_1} - D^{Z_2}) \psi = V \cdot \psi$$

gibt.  $V$  ist dann eindeutig bestimmt und entspricht unter Verwendung der Metrik der 1-Form  $\text{div}^{Z_1} - \text{div}^{Z_2} : TX^n \rightarrow R$ .

Wir betrachten jetzt nur einen Zusammenhang  $Z$  mit dem entsprechenden Divergenzoperator  $\text{div}^Z$ . Weiterhin sei  $\text{div}$  der Divergenzoperator der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $X^n$ . Der zu  $D^Z$  formal-adjungierte Operator  $(D^Z)^*$  wird durch die Bedingung

$$\int_{X^n} (D^Z \psi, \psi_1) = \int_{X^n} (\psi, (D^Z)^* \psi_1)$$

eindeutig bestimmt. Hierbei sind  $\psi, \psi_1$  Schnitte mit kompakten Träger. Aus

$$(D^Z \psi, \psi_1) = \delta \alpha + (\psi, \sum_{i=1}^n ({}^Z \nabla_{s_i} \psi_1 + \text{div}(s_i) s_i \psi_1))$$

erhalten wir

$$(D^Z)^* \psi = \sum_{i=1}^n ({}^Z \nabla_{s_i} \psi + \text{div}(s_i) s_i \psi).$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann  $D^Z$  ein formal-selbst-adjungierter Operator ist. Weil  $D^Z = (D^Z)^*$  ein Bündelhomomorphismus von  $\mathcal{Y}$  ist, gilt  $D^Z = (D^Z)^*$  genau dann, wenn  $D^Z \eta(\varepsilon) = (D^Z)^* \eta(\varepsilon)$  für lokale Basisschnitte  $\eta(\varepsilon)$  erfüllt ist.

Wir erhalten somit die Bedingung

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{l \neq m} \omega_{lm}^Z(s_i) (s_i s_l s_m - s_l s_m s_i) = \sum_{i=1}^n \text{div}(s_i) s_i$$

in  $\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ , woraus

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{m=1}^n \omega_{im}^Z(s_m) \right) s_i = \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(s_i) s_i$$

oder  $\sum_{i=1}^n \operatorname{div}^Z(s_i) s_i = \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(s_i) s_i$  folgt. Daher gilt

Satz 3 (vergl. [13]):

$D^Z$  ist genau dann formal-selbstadjungiert, falls  $\operatorname{div}^Z = \operatorname{div}$ .

Bemerkung: Satz 3 verallgemeinert ein Ergebnis von A. Ikeda (vergl. [20]), der im Grunde genau dieses Resultat im Fall homogener Räume und invarianter Zusammenhänge bewies.

Bemerkung: Obwohl wir nur Mannigfaltigkeiten der Dimension größer als 2 betrachten, bemerken wir an dieser Stelle, daß für einen Zusammenhang  $Z$  in  $Q$  einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit aus  $\operatorname{div}^Z = \operatorname{div}$  bereits  $Z = \text{Levi-Civita-Zusammenhang}$  folgt. Ist nämlich  $\Theta = (\Theta^1, \Theta^2)$  die Torsionsform und  $s^* \Theta = (\Theta_S^1, \Theta_S^2)$  die lokale Torsionsform, so folgt aus den Strukturgleichungen

$$d\sigma^i = \sum_{j=1}^2 \omega_{ij}^Z \wedge \sigma^j + \Theta_S^i,$$

in denen  $\sigma^1, \sigma^2$  ein zu  $s = (s_1, s_2)$  duales Reper bildet,

$$\sum_{i=1}^2 \sigma^i([s_1, s_m]) = \sum_{i=1}^2 \omega_{mi}^Z(s_i) - \sum_{i=1}^2 \Theta_S^i(s_1, s_m)$$

also  $\operatorname{div}(s_m) = \operatorname{div}^Z(s_m) - \sum_{i=1}^2 \Theta_S^i(s_1, s_m)$ .

Dann ist  $\operatorname{div} = \operatorname{div}^Z$  gleichwertig mit

$$\sum_{i=1}^2 \Theta_S^i(s_1, s_m) = 0 \quad m = 1, 2$$

und daraus ergibt sich  $\Theta_S^1(s_1, s_2) = 0 = \Theta_S^2(s_1, s_2)$ .

Der Zusammenhang  $Z$  ist somit torsionsfrei.

Beispiel 1: Wir geben einen Zusammenhang  $Z$  so an, daß  $D^Z$  formal selbstadjungiert und von  $D$  verschieden ist. Sei  $K = \mathbb{R}^3$  der

3-dimensionale, euklidische Raum mit dem Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ . Wir legen

$${}^Z \nabla_U V = \nabla_U V + U \otimes V,$$

wobei  $\otimes$  das Vektorprodukt in  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Leicht prüft man nach, daß  ${}^Z \nabla$  ein Riemannscher Zusammenhang ist. Aus  $U \otimes U = 0$  folgt  $\operatorname{div}^Z = \operatorname{div}$ . Weiterhin gilt  $K(U, V, W) = 3 \det(U, V, W)$ . Nach Satz 3 ist  $D^Z$  ein formal-selbstadjungierter Operator, welcher auf Grund von Satz 2 von  $D$  verschieden ist.

Beispiel 2: Wir geben nun ein Beispiel an, welches zwei Tatsachen zeigen soll. Erstens folgt aus  $\operatorname{div}^{Z_1} = \operatorname{div}^{Z_2}$  und  $K = 0$  nicht  $Z_1 = Z_2$ . Dies bedeutet, daß verschiedene Zusammenhänge den gleichen Dirac-Operator ergeben können. Zweitens folgt aus  $K = 0$  nicht  $\operatorname{div}^{Z_1} = \operatorname{div}^{Z_2}$ , so daß in Satz 2 beide Bedingungen notwendig sind. Wir betrachten dazu wiederum den 3-dimensionalen, euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Levi-Civita-Zusammenhang  $Z$ . Sei

$$A_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definiert durch

$$A_t \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_2 + t x_3 y_3 \\ -x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_2 y_3 + x_3 y_3 \\ -x_1 y_1 + x_2 y_2 - t x_3 y_1 - x_3 y_2 \end{pmatrix}.$$

$A_t$  ist bilinear und eine direkte Rechnung zeigt

$$\langle A_t(U, V), W \rangle = - \langle A_t(U, W), V \rangle.$$

Wir definieren durch

$${}^{Z_t} \nabla_U V = \nabla_U V + A_t(U, V)$$

einen Riemannschen Zusammenhang  $Z_t$ . Dann gilt

$$(\operatorname{div}^{Z_t} - \operatorname{div}^Z)(U) = (1-t)u_1 \quad \text{und} \quad K = 0.$$

Somit sind für  $t = 1$  die Bedingungen  $\operatorname{div}^{Z_1} = \operatorname{div}^Z$  und  $K = 0$  erfüllt, obwohl  $Z_1$  verschieden von  $Z$  ist. Weiterhin erhalten wir

für  $t = 2$  einen Zusammenhang  $Z_2$  mit  $\text{div}^{Z_2} \neq \text{div}^Z$  und  $K = 0$ .

Bemerkung: In den weiteren Kapiteln der vorliegenden Arbeit betrachten wir nur noch den Levi-Civita-Zusammenhang der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wir schreiben dann  $\nabla$  für die kovariante Ableitung im Tangentialbündel,  $\nabla^{\mathcal{F}}$  für die im Spinorbündel induzierte Ableitung und bezeichnen den Dirac-Operator mit  $D$ .

2. Die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur.

2.1. Die Deformation zweier Spin-Strukturen.

Das Ziel dieses Abschnittes der Arbeit besteht darin, je zwei Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  eines  $SO(n)$ -Hauptfaserbündels  $(Q, \pi, X; SO(n))$  über einem zusammenhängenden CW-Komplex  $X$  eine Deformation  $(R, \xi)$  zuzuordnen, welche in gewissem Sinne als Differenz dieser Spin-Strukturen aufgefaßt werden kann und aus einem  $SO(n) \times Z_2$ -Hauptfaserbündel  $R$  sowie einer zweifachen Überlagerung  $\xi: R \rightarrow Q$  bestehen wird. Um diese Deformation auf natürlichem Wege zu erhalten, verwenden wir eine algebraisch-topologische Beschreibung der Spin-Strukturen, definieren in dieser Sprache die Deformation zweier Spin-Strukturen und deuten danach das erhaltene Ergebnis als ein Paar  $(R, \xi)$  mit den angegebenen Eigenschaften. Daher stellen wir kurz die topologische Interpretation einer Spin-Struktur dar und folgen dabei J. Milnor (vergl. [24] und [25]).

Ist  $(P, \lambda)$  eine Spin-Struktur von  $Q$ , so können wir dieses Paar einfach als eine zweifache Überlagerung des Raumes  $Q$  mit zusammenhängendem Überlagerungsraum  $P$  auffassen und ihm somit eine Untergruppe  $H(P, \lambda)$  vom Index 2 der Fundamentalgruppe

$\pi_1(Q; q)$  zuordnen. Wir betrachten die Einbettung  $i_q: SO(n) \rightarrow Q$  der Gruppe  $SO(n)$  in die durch den Punkt  $q$  verlaufende Faser des Bündels  $Q$ , welche durch  $i_q(A) = q \cdot A, A \in SO(n)$ , definiert ist und einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen

$$(i_q)_\# : \pi_1(SO(n); e) \rightarrow \pi_1(Q; q)$$

induziert. Das Bild des nichttrivialen Elementes  $\alpha$  der Fundamentalgruppe  $\pi_1(SO(n); e) = Z_2$  unter  $(i_q)_\#$  bezeichnen wir mit  $\alpha_q, \alpha_q = (i_q)_\#(\alpha)$ . Man sieht nun unschwer ein, daß  $H(P, \lambda)$  das Element  $\alpha_q$  nicht enthält. Ist umgekehrt



eine Untergruppe  $H$  von  $\pi_1(Q; q)$  vom Index 2 gegeben, in welcher  $\alpha_q$  nicht liegt, so kann im Totalraum  $P$  durch  $H$  bestimmten Überlagerung  $\lambda: P \rightarrow Q$  die Struktur eines Spin-Hauptfaserbündels so eingeführt werden, daß  $(P, \lambda)$  eine Spin-Struktur von  $Q$  ist. Aus diesem Grunde sind die Spin-Strukturen von  $Q$  - bis auf Isomorphie - durch die Untergruppen vom Index 2 beschrieben, welche  $\alpha_q$  nicht enthalten.

Wir führen eine weitere, algebraisch-topologische Interpretation einer Spin-Struktur an. Diese erhält man nun aus der für jeden zusammenhängenden Raum  $Y$  geltenden Formel

$$H^1(Y; \mathbb{Z}_2) = \text{Hom} \left( \frac{\pi_1(Y)}{[\pi_1(Y), \pi_1(Y)]} ; \mathbb{Z}_2 \right), \quad (1)$$

in welcher  $H^1$  die erste Kohomologiegruppe und  $[\pi_1(Y), \pi_1(Y)]$  die Kommutatorgruppe von  $\pi_1(Y)$  sind (vergl [30]). Diese Formel gestattet es, die Untergruppe  $H(P, \lambda)$  der Spin-Struktur  $(P, \lambda)$  als Element  $\sigma(P, \lambda)$  der ersten Kohomologiegruppe  $H^1(Q; \mathbb{Z}_2)$  von  $Q$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_2$  aufzufassen. Die Bedingung  $\alpha_q \notin H(P, \lambda)$  geht dabei in die Forderung über, daß die Einschränkung von  $\sigma(P, \lambda)$  auf die Fasern des Hauptfaserbündels  $\pi: Q \rightarrow X$  das nichttriviale Element von  $H^1(\text{Faser}; \mathbb{Z}_2) = H^1(SO(n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  liefert. Somit sind alle Spin-Strukturen von  $Q$  durch diejenigen Elemente  $\sigma \in H^1(Q; \mathbb{Z}_2)$  beschrieben, deren Einschränkung auf die Fasern ungleich Null sind.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wenden wir uns jetzt der Konstruktion der Deformation  $(R, \xi)$  zweier Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  zu. Wir fassen diese Spin-Strukturen als Elemente  $\sigma(P_1, \lambda_1)$  und  $\sigma(P_2, \lambda_2)$  der Gruppe  $H^1(Q; \mathbb{Z}_2)$  auf und dann liegt es nahe, unter ihrer Deformation  $R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2)$  die Differenz

$$R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2) = \sigma(P_1, \lambda_1) - \sigma(P_2, \lambda_2)$$

zu verstehen. Die Deformation R ist ein Element der ersten Kohomologiegruppe  $H^1(Q; Z_2)$  von Q, dessen Einschränkung auf die Fasern des Hauptfaserbündels Q gleich Null ist. Weiterhin verschwindet R genau dann, wenn die beiden betrachteten Spin-Strukturen isomorph sind. Interpretieren wir nun R unter Verwendung der Formel <1> als Untergruppe der Fundamentalgruppe, so entsteht

$$R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2) = H(P_1, \lambda_1) \cap H(P_2, \lambda_2) \cup (\pi_1(Q; q) - H(P_1, \lambda_1)) \cap (\pi_1(Q; q) - H(P_2, \lambda_2)).$$

Wir sehen daraus, daß  $R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2)$  eine Untergruppe von  $\pi_1(Q; q)$  ist, welche  $\alpha_q$  enthält. Sie ist gleich  $\pi_1(Q; q)$  genau dann, wenn die Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  isomorph sind. Anderenfalls ist R eine Untergruppe vom Index 2.

Die Untergruppe R induziert eine zweifache Überlagerung  $(R, \xi)$  von Q, welche für  $(P_1, \lambda_1) \neq (P_2, \lambda_2)$  wegen  $R \neq \pi_1(Q; q)$  einen zusammenhängenden Überlagerungsraum R hat und im Fall  $(P_1, \lambda_1) = (P_2, \lambda_2)$  aus zwei Exemplaren von Q besteht:  $R = Q \times Z_2$ . Wir beschreiben jetzt, wie man  $(R, \xi)$  aus den Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  erhalten kann. Dabei bezeichnen wir mit  $(-1) \in \text{Spin}(n)$  das durch  $\xi(x) = e$  und  $x \neq e$  eindeutig bestimmte Element der Gruppe  $\text{Spin}(n)$ . Zur Beschreibung von  $(R, \xi)$  gehen wir aus von

$$\tilde{R} = \left\{ (p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 : \lambda_1(p_1) = \lambda_2(p_2) \right\}$$

und betrachten in  $\tilde{R}$  eine durch

$$(-1) \cdot (p_1, p_2) = (p_1 \cdot (-1), p_2 \cdot (-1))$$

definierte  $Z_2$ -Wirkung. Sei  $\tilde{R} = \tilde{R}/Z_2$  der Orbitraum, dessen Punkte wir mit  $[p_1, p_2]$  bezeichnen wollen. Eine zweifache Überlagerung  $\tilde{\xi}: \tilde{R} \rightarrow Q$  erhalten wir aus  $\tilde{\xi}[p_1, p_2] = \lambda_1(p_1)$ .

Lemma 1: R ist genau dann zusammenhängend, falls die Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  nicht isomorph sind.

Beweis: Wir gehen zuerst von verschiedenen Spin-Strukturen aus und betrachten zwei Punkte  $[p_1, p_2]$  ,  $[p_1^c, p_2^c]$  in  $\tilde{R}$ . Weil  $P_1$  zusammenhängend ist, existiert ein die Punkte  $p_1$  und  $p_1^c$  verbindender Weg  $\gamma_1 : I \rightarrow P_1$ . Dann ist  $\lambda_1 \circ \gamma_1$  ein Weg in  $Q$  von  $\lambda_1(p_1) = \lambda_2(p_2)$  nach  $\lambda_1(p_1^c) = \lambda_2(p_2^c)$ . Durch Hebung dieses Weges erhalten wir einen Weg  $\gamma_2 : I \rightarrow P_2$  mit  $\gamma_2(0) = p_2$  und  $\lambda_1 \circ \gamma_1 = \lambda_2 \circ \gamma_2$ . Daraus folgt entweder  $\gamma_2(1) = p_2^c$  oder  $\gamma_2(1) = p_2^c \cdot (-1)$ . Gilt ersteres, so ist durch  $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)]$  ein die Punkte  $[p_1, p_2]$  und  $[p_1^c, p_2^c]$  verbindender Weg  $\gamma$  in  $\tilde{R}$  gefunden. Wir können also  $\gamma_2(1) = p_2^c \cdot (-1)$  annehmen. Weil die beiden Spin-Strukturen verschieden sind, existiert ein Weg  $\eta$  in  $Q$  vom Punkt  $\lambda_1(p_1^c) = \lambda_2(p_2^c)$  nach sich selbst, welcher in  $H(P_1, \lambda_1)$ , aber nicht in  $H(P_2, \lambda_2)$  liegt. Heben wir diesen Weg in  $P_1$ , so entsteht ein geschlossener Weg  $\eta_1$  im Punkte  $p_1^c$ . Heben wir andererseits  $\eta$  in  $P_2$ , so erhalten wir einen Weg  $\eta_2$  von  $p_2^c \cdot (-1)$  nach  $p_2^c$ . Wir betrachten dann

$$\gamma : I \rightarrow \tilde{R} \text{ definiert durch}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} [\gamma_1(t), \gamma_2(t)] & 0 \leq t \leq 1 \\ [\eta_1(t-1), \eta_2(t-1)] & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

und bemerken, daß  $\gamma$  die anfangs fixierten Punkte von  $\tilde{R}$  verbindet. Daher ist  $\tilde{R}$  zusammenhängend.

Sei nun  $(P_1, \lambda_1) = (P_2, \lambda_2)$ . Durch  $f(q) = [\lambda_1^{-1}(q), \lambda_1^{-1}(q)]$  definieren wir dann eine stetige Abbildung  $f : Q \rightarrow \tilde{R}$  eindeutig. Aus  $\tilde{\zeta} \circ f = id_Q$  erhalten wir in diesem Fall  $\tilde{R} = Q \times Z_2$ . Damit ist Lemma 1 vollständig bewiesen.

Man sieht nun unschwer ein, daß die Überlagerung  $(\tilde{R}, \tilde{\zeta})$  durch die Untergruppe  $R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2)$  von  $\pi_1(Q|Q)$  bestimmt wird und somit gleich  $(R, \xi)$  ist. Auf diese Weise haben wir eine direkte Konstruktion für  $(R, \xi)$  erhalten. In  $R$  führen wir die Struktur eines  $SO(n) \times Z_2$  - Hauptfaserbündels über  $X$  ein.

Die Projektion  $\pi : R \rightarrow X$  ergibt sich aus den Projektionen in  $P_1$  beziehungsweise  $P_2$  unmittelbar. Dagegen wirkt die Gruppe  $SO(n) \times Z_2$  auf  $R$  durch

$$[p_1, p_2] \circ (A, x) = [p_1 \circ \hat{A}, p_2 \circ \hat{A} \cdot x]$$

mit  $x = \pm 1 \in Z_2$  und  $A \in SO(n)$ . Dabei ist  $\hat{A}$  ein Element der Gruppe  $Spin(n)$  mit  $\xi(\hat{A}) = A$ . Auf Grund der Definition von  $R$  hängt diese Gruppenwirkung nicht von der Wahl des Elementes  $\hat{A}$  ab. Dann ist  $(R, \pi, X; SO(n) \times Z_2)$  ein  $SO(n) \times Z_2$ -Hauptfaserbündel. Ist  $pr : SO(n) \times Z_2 \rightarrow SO(n)$  die Projektion auf die erste Achse, so kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R \times (SO(n) \times Z_2) & \xrightarrow{\quad} & R \\ \downarrow \xi \times pr & & \downarrow \xi \\ Q \times SO(n) & \xrightarrow{\quad} & Q \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} X \\ \\ X \end{array} \quad \langle 2 \rangle$$

Definition: Gegeben seien zwei Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  eines  $SO(n)$ -Hauptfaserbündels  $(Q, \pi, X; SO(n))$  über einem zusammenhängenden CW-Komplex  $X$ . Das konstruierte  $SO(n) \times Z_2$ -Hauptfaserbündel  $(R, \pi, X; SO(n) \times Z_2)$  samt der zweifachen Überlagerung  $\xi : R \rightarrow Q$  nennen wir die Deformation dieser Spin-Strukturen.

Sei  $Spin(Q)$  die Menge aller Isomorphieklassen von Spin-Strukturen des Hauptfaserbündels  $Q$  und bezeichne  $Def-Spin(Q)$  die Menge aller Isomorphieklassen von Deformationen der Spin-Strukturen. Die Elemente von  $Def-Spin(Q)$  sind also Paare  $(R, \xi)$  bestehend aus einem  $SO(n) \times Z_2$ -Hauptfaserbündel  $R$  über  $X$  und einer zweifachen Überlagerung  $\xi : R \rightarrow Q$  derart, daß das Diagramm  $\langle 2 \rangle$  kommutativ ist. Wir haben somit eine Abbildung  $Spin(Q) \times Spin(Q) \rightarrow Def-Spin(Q)$  konstruiert. Es ist nicht sonderlich schwer, eine Rückkonstruktion anzugeben, d.h. aus einer Spin-Struktur und einer Deformation eine neue Spin-Struktur so zu bestimmen, daß natürliche Bedingungen erfüllt sind. Tatsächlich, sind  $(P, \lambda)$  eine Spin-Struktur und  $(R, \xi)$  eine Deformation, so betrachten wir

$$\tilde{P}_1 = \{ (p, r) \in P \times R : \lambda(p) = \xi(r) \}$$

mit der  $Z_2$ -Wirkung  $(p, r) \cdot (-1) = (p \cdot (-1), r \cdot (-1))$  und bezeichnen mit  $P_1$  den Orbitraum  $\tilde{P}_1/Z_2$ . Eine zweifache Überlagerung

$\lambda_1: P_1 \longrightarrow Q$  ergibt sich dann natürlicherweise. In  $P_1$  führen wir durch  $[p, r] \cdot A = [p \cdot A, r \cdot \xi(A)]$ ,  $A \in \text{Spin}(n)$ , die Struktur eines Spin-Hauptfaserbündels ein und dann wird  $(P_1, \lambda_1)$  eine Spin-Struktur von  $Q$ .

Bemerkung: J. Milnor (vergl. [24]) hat darauf hingewiesen, daß ein  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel  $Q$  zwei nichtisomorphe Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  zulassen kann, deren  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündel  $P_1$  und  $P_2$  als solche isomorph sind, und stellte im Zusammenhang damit die Vermutung auf, daß diese Situation immer im Fall  $\dim(X) < n$  vorliegt. Wir bemerken an dieser Stelle, daß man der Deformation  $(R, \xi)$  zweier Spin-Strukturen ansehen kann, ob ihre Spin-Hauptfaserbündel isomorph sind. Tatsächlich, ist  $g: P_1 \longrightarrow P_2$  ein Morphismus der Hauptfaserbündel, so erhalten wir mittels

$$g(p_1) = p_2 \circ f [p_1, p_2] \tag{3}$$

eine Abbildung  $f: R \longrightarrow \text{Spin}(n)$ . Lassen wir die Gruppe  $SO(n) \times Z_2$  auf  $\text{Spin}(n)$  von rechts durch  $A \cdot (B, x) = \hat{B}^{-1} A \hat{B} \cdot x$  mit  $x = \pm 1$ ,  $A \in \text{Spin}(n)$ ,  $B \in SO(n)$  und  $\xi(\hat{B}) = B$  wirken, so ist  $f: R \longrightarrow \text{Spin}(n)$  eine bezüglich der Wirkungen von  $SO(n) \times Z_2$  auf den entsprechenden Räumen äquivalente Abbildung. Ist andererseits  $f$  gegeben, so erhalten wir aus (3) eine Hauptfaserbündelabbildung  $g$ . Somit gilt: Die Spin-Hauptfaserbündel  $P_1, P_2$  zweier Spin-Strukturen sind genau dann isomorph, falls es eine  $SO(n) \times Z_2$ -äquivalente Abbildung  $f: R \longrightarrow \text{Spin}(n)$  gibt.

### 3.2. Anwendung der Deformation von Spin-Strukturen auf die assoziierten Spinorbündel.

Gegeben seien ein  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel  $(Q, \pi, \mathbb{R}; SO(n))$  über einem zusammenhängenden GW-Komplex  $X$ , zwei Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  von  $Q$  sowie deren Deformation  $(R, \xi)$ . Die assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2$  zu diesen Spin-Strukturen sind dann

$$\mathcal{Y}^1 = P_1 \times_{Spin(n)} \Delta_n, \quad \mathcal{Y}^2 = P_2 \times_{Spin(n)} \Delta_n.$$

In diesem Abschnitt der Arbeit interessiert uns die Frage, wodurch die Vektorbündel  $\mathcal{Y}^1$  und  $\mathcal{Y}^2$  sich unterscheiden. Zur Untersuchung dieser betrachten wir drei weitere Vektorbündel  $E, V$  und  $W$ . Dabei ist das reelle, 1-dimensionale Vektorbündel  $E$  durch

$$E = \mathbb{R} \times_{SO(n) \times Z_2} \mathbb{R}^1 \text{ mit der } SO(n) \times Z_2\text{-Wirkung } (A, x)y = xy, \quad A \in SO(n), \\ y \in \mathbb{R}^1, \quad x \in Z_2, \text{ auf } \mathbb{R}^1 \text{ definiert, während } V \text{ durch}$$

$$V = \mathbb{R} \times_{SO(n) \times Z_2} \mathbb{R}^n \text{ mit der Wirkung } (A, x)y = A(xy), \quad A \in SO(n), x \in Z_2,$$

$y \in \mathbb{R}^n$  gegeben ist. Letztlich sei  $W$  definiert durch

$$W = \mathbb{R} \times_{SO(n) \times Z_2} \mathbb{R}^n, \text{ wobei hier } SO(n) \times Z_2 \text{ mittels } (A, x)y = A(y)$$

auf dem Raum  $\mathbb{R}^n$  wirkt. Selbstverständlich kann  $W$  auch durch die

$$\text{Formeln } W = \mathbb{R} \times_{SO(n) \times Z_2} \mathbb{R}^n = Q \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n = P_1 \times_{Spin(n)} \mathbb{R}^n =$$

$= P_2 \times_{Spin(n)} \mathbb{R}^n$  mit den entsprechenden Wirkungen der Gruppen  $SO(n)$  und  $Spin(n)$  auf dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  definiert werden. Weiter-

hin gilt

$$E \otimes V = W.$$

Die Komplexifizierung des Vektorbündels  $E$  bezeichnen wir mit  $E^{\mathbb{C}}$ .

Satz 1: Es existiert eine natürliche Vektorbündelisomorphie

$$\beta : E \otimes \mathcal{Y}^1 \longrightarrow \mathcal{Y}^2.$$

Bevor wir zum Beweis von Satz 1 kommen, zeigen wir

Lemma 2: Seien  $e \in E_x$  und  $s \in \mathcal{Y}_x^1$  Elemente der entsprechenden Vektorbündel über ein und denselben Punkt  $x \in X$ . Läßt sich  $s$  in der

Form  $s = [p_1, \psi]$  darstellen, so existieren  $p_2 \in P_2$  und  $t \in \mathbb{R}^1$  mit  $e = [[p_1, p_2], t]$ .

Beweis: Gelte  $e = [[p_1', p_2'], t']$ . Aus  $\pi(e) = x = \pi(s)$  folgt  $\pi(p_1') = \pi(p_1)$ . Somit existiert ein Element  $A \in \text{Spin}(n)$  mit  $p_1' = p_1 \cdot A$ . Dann gilt

$$e = [[p_1 \cdot A, p_2'], t'] = [[p_1, p_2' \cdot A^{-1}] \cdot \mathcal{S}(A), t'] = [[p_1, p_2' \cdot A^{-1}], t'] .$$

Beweis von Satz 1: Wir definieren die Abbildung  $\beta : E \otimes \mathcal{Y}^1 \rightarrow \mathcal{Y}^2$  wie folgt: Sind  $s \in \mathcal{Y}_x^1$  und  $e \in E_x$  gegeben, so stelle wir diese Elemente in der Form  $s = [p_1, \psi]$  und  $e = [[p_1, p_2], t]$  gemäß Lemma 2 dar und setzen

$$\beta(e \otimes s) = [p_2, t \cdot \psi] .$$

Man überzeugt sich sofort davon, daß  $\beta$  eindeutig definiert und eine Isomorphie ist.

Folgerung 1: Sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex, dessen zweite, ganzzahlige Kohomologiegruppe keine 2-Torsionen besitzt. Sind  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  zwei Spin-Strukturen eines  $SO(n)$ -Hauptfaserbündels  $Q$  über  $X$ , so sind die zu ihnen assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{Y}^1$  und  $\mathcal{Y}^2$  isomorph.

Beweis:  $\mathcal{Y}^1$  und  $\mathcal{Y}^2$  sind komplexe Vektorbündel. Aus Satz 1 folgt dann, daß  $\mathcal{Y}^2$  isomorph zu  $E^c \otimes \mathcal{Y}^1$  ist. Weil  $E^c$  die Komplexifizierung eines reellen Bündels  $E$  ist, gilt für dessen erste Chern-Klasse  $c_1(E^c)$

$$2c_1(E^c) = 0 .$$

Wir erhalten somit  $c_1(E^c) = 0$  und daher ist  $E^c$  ein triviales Vektorbündel (vergl. [18]).

Folgerung 2:  $X$  sei ein zusammenhängender CW-Komplex der Dimension  $\dim(X) < n$  und  $Q$  sei ein  $SO(n)$ -Hauptfaserbündel über  $X$  mit den Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$ . Die assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{Y}^1$  und  $\mathcal{Y}^2$  sind dann isomorph.

Beweis: Wegen  $E \otimes V = W$  induziert  $\beta : E \otimes \mathcal{Y}^1 \rightarrow \mathcal{Y}^2$

eine Isomorphie  $\tilde{\beta}: W \otimes \mathcal{Y}^1 \longrightarrow V \otimes \mathcal{Y}^2$ . Weiterhin ergibt die Cliffordmultiplikation  $\mu: \mathbb{R}^n \otimes \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$  einen Homomorphismus  $\mu: W \otimes \mathcal{Y}^1 \longrightarrow \mathcal{Y}^1$  mit der Eigenschaft, daß aus  $\mu(w \otimes \psi) = 0$  entweder  $w = 0$  oder  $\psi = 0$  folgt. Wegen  $\dim(X) < n = \dim(W)$  hat  $V$  einen nirgends verschwindenden Schnitt  $v \in \Gamma(V)$ .

Durch  $s^2 \longrightarrow \mu \tilde{\beta}^{-1}(v \otimes s^2)$  wird dann eine Isomorphie  $\mathcal{Y}^2 \longrightarrow \mathcal{Y}^1$  erklärt.

Bemerkung: Die Cliffordmultiplikation induziert Homomorphismen

$$\mu^1: W \otimes \mathcal{Y}^1 \longrightarrow \mathcal{Y}^1, \quad \mu^2: W \otimes \mathcal{Y}^2 \longrightarrow \mathcal{Y}^2.$$

Dann ist

$$\begin{array}{ccc} W \otimes E \otimes \mathcal{Y}^1 & \xrightarrow{\text{id}_E \otimes \mu^1} & E \otimes \mathcal{Y}^1 \\ \downarrow \text{id}_W \otimes \beta & & \beta \downarrow \\ W \otimes \mathcal{Y}^2 & \xrightarrow{\mu^2} & \mathcal{Y}^2 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm.

Wir wenden uns jetzt einer näheren Untersuchung des Bündels  $E$  zu.

Weil in der Definition von  $E = \mathbb{R} \times_{SO(n) \times \mathbb{Z}_2} \mathbb{R}^1$  die Gruppe  $SO(n)$  auf  $\mathbb{R}^1$  trivial wirkt, kann man  $E$  auch in der Form  $E = \hat{X} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}^1$

mit der zweifachen Überlagerung  $\eta: \hat{X} = \mathbb{R}/SO(n) \longrightarrow X$  darstellen.

Um diese Überlagerung zu beschreiben, müssen wir ihre erzeugende Untergruppe in  $\pi_1(X)$  angeben. Diese erhält man folgendermaßen:

Die Faserung  $\pi: Q \longrightarrow X$  induziert die exakte Homotopiesequenz  $\dots \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \pi_1(SO(n)) \longrightarrow \pi_1(Q) \xrightarrow{\pi_{\#}} \pi_1(X) \longrightarrow 0$ .

Fassen wir die Deformation zweier Spin-Strukturen wie im Abschnitt 3.1. als Untergruppe  $R$  von  $\pi_1(Q)$  auf, so folgt aus der Exaktheit dieser Sequenz und aus  $\alpha_q \in R$ , daß  $\pi_{\#}(R)$  eine Untergruppe von  $\pi_1(X)$  ist, deren Index gleich zwei im Fall  $(P_1, \lambda_1) \neq (P_2, \lambda_2)$  ist, und anderenfalls mit  $\pi_1(X)$  zusammenfällt. Die Untergruppe  $\pi_{\#}(R) \subset \pi_1(X)$  erzeugt die zweifache Überlagerung

$\eta: \hat{X} \longrightarrow X$ . Dies ersieht man sofort aus dem nachstehenden, kommutativen Diagramm, in welchem die Spalten exakt sind.



$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathrm{SO}(n)) & & \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\xi\#} & \pi_1(\mathbb{Q}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(X) & \xrightarrow{\eta\#} & \pi_1(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Damit haben wir die Überlagerung  $\eta: \hat{X} \longrightarrow X$  mittels der Untergruppe  $\pi_1(\mathbb{R}) \subset \pi_1(X)$  beschrieben. Das 1-dimensionale, reelle Vektorbündel  $E$  ist vollständig durch seine erste Stiefel-Whitney-Klasse  $w_1(E)$  charakterisiert, welche wir jetzt aus der angegebenen Beschreibung der Überlagerung in Abhängigkeit von den Spin-Strukturen ausdrücken wollen. Die Faserung  $\pi: \mathbb{Q} \longrightarrow X$  induziert in der Kohomologie modulo 2 eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(\mathbb{Q}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(\text{Faser}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} \dots$$

(vergl. [30]). Die kohomologisch interpretierte Deformation zweier Spin-Strukturen ist ein solches Element aus  $H^1(\mathbb{Q}; \mathbb{Z}_2)$ , dessen Einschränkung auf die Faser verschwindet. Dies bedeutet mit Hinblick auf die Exaktheit der obigen Sequenz, daß  $R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2)$  als Element von  $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$  aufgefaßt werden kann. Dann gilt

**Satz 2:**  $w_1(E) = R(P_1, \lambda_1; P_2, \lambda_2)$ .

Der Beweis von Satz 2 ergibt sich aus der Beschreibung der Überlagerung  $\eta: \hat{X} \longrightarrow X$  sowie aus folgender, bekannten Tatsache unmittelbar: Sei  $H \subset \pi_1(X)$  eine Untergruppe vom Index 2,

$\eta: \hat{X} \longrightarrow X$  die durch sie bestimmte Überlagerung und  $E = \hat{X} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}^1$  das assoziierte Vektorbündel. Dann entspricht bei der Identifikation  $\{ \text{Untergruppe vom Index 2 in } \pi_1(X) \} \cong \{ w \in H^1(X; \mathbb{Z}_2) : w \neq 0 \}$  die Untergruppe  $H$  der ersten Stiefel-Whitney-Klasse  $w_1(E)$ .

Beispiel: Wir betrachten den reellen, projektiven Raum  $P^5$  der Dimension 5, dessen zweite und vierte ganzzahlige Kohomologiegruppe jeweils isomorph zu  $Z_2$  ist und in denen erzeugende Elemente  $x_2, y_4$  mit  $x_2^2 = y_4$  gewählt werden können (siehe Anhang am Ende dieses Kapitels). Sei  $Q = P^5 \times SO(4)$  das triviale  $SO(4)$ -Hauptfaserbündel über  $P^5$ , welches wegen  $H^1(P^5; Z_2) = Z_2$  zwei Spin-Strukturen zuläßt. Dann ist die Deformation  $R$  gleich dem nichttrivialen Element von  $H^1(P^5; Z_2) = Z_2$  und die Überlagerung  $\eta: \hat{X} \longrightarrow P^5$  ist die einzige zweifache Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum, welche der projektive Raum zuläßt, nämlich  $S^5 \longrightarrow P^5$ . Somit hat das Bündel  $E$  die Form  $E = S^5 \times_{Z_2} R^4$  mit der durch  $x \longrightarrow -x$  gegebenen  $Z_2$ -Wirkung auf der Sphäre. Wir bemerken, daß die Komplettifizierung  $E^c$  ein nichttriviales Vektorbündel ist. Anderenfalls würde eine stetige Abbildung  $f: S^5 \longrightarrow S^1$  mit  $f(-x) = -f(x)$  existieren. Dies ist aber nach dem Satz von Borsuk - Ulam (vergl. [30]) unmöglich. Wir erhalten daraus für die erste Chern-Klasse des Bündels  $E^c$  die Formel  $c_1(E^c) = x_2$ . Wir zeigen nun, daß die zu den Spin-Strukturen assoziierten Vektorbündel  $\mathcal{Y}^1$  und  $\mathcal{Y}^2$  nicht isomorph sind. Tatsächlich, das erste Vektorbündel  $\mathcal{Y}^1$  ist trivial, weil  $Q = P^5 \times SO(4)$  eine Spin-Struktur  $P_1 = P^5 \times Spin(4)$  besitzt. Somit genügt es zu zeigen, daß  $\mathcal{Y}^2$  nicht trivial ist. Wäre dies der Fall, so erhielten wir wegen  $\dim(\mathcal{Y}^1) = \dim(\mathcal{Y}^2) = 2$  aus Satz 1 die Gleichung  $2E^c = 2$ . Gehen wir zu den Chern-Klassen über, würde sich  $2c_1(E^c) = 0$  und  $c_1^2(E^c) = 0$  ergeben. Während die erste Gleichung auf Grund von  $H^2(P^5; Z) = Z_2$  natürlich möglich ist, kann  $c_1^2(E^c) = 0$  mit Hinblick auf
 
$$c_1^2(E^c) = x_2^2 = y_4 \neq 0$$
 nicht gelten. Daher ist  $\mathcal{Y}^2$  ein nichttriviales Vektorbündel. Dieses Beispiel zeigt, daß die in Folgerung 1 und 2 gemachten Voraussetzungen über  $H^2(X; Z)$  beziehungsweise  $\dim(X)$  notwendig sind und im allgemeinen die Isomorphie von  $\mathcal{Y}^1$  und  $\mathcal{Y}^2$  nicht vorliegt.

### 3.3. Die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur.

Wir betrachten in diesem Abschnitt der Arbeit eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit  $X^n$  der Dimension  $n$  mit dem assoziierten  $SO(n)$  - Hauptfaserbündel  $(Q, \pi, X^n; SO(n))$  und befassen uns damit, wie der Dirac-Operator  $D$  im Spinorbündel von der gewählten Spin-Struktur abhängt.

Gegeben seien zwei Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1)$  und  $(P_2, \lambda_2)$  von  $Q$  sowie deren Deformation  $(R, \xi)$ . Durch Hebung des lokalen Schnittes  $s: V \rightarrow Q$  erhalten wir  $\hat{s}_1: V \rightarrow P_1$  und  $\hat{s}_2: V \rightarrow P_2$  sowie einen lokalen Schnitt  $\hat{s} = [\hat{s}_1, \hat{s}_2]: V \rightarrow R$  im Bündel  $R$ . Der Levi-Civita-Zusammenhang  $Z$  induziert Zusammenhänge  $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2$  in  $P_1, P_2$  entsprechend und einen Zusammenhang  $\hat{Z}_R$  im  $SO(n) \times Z_2$  - Hauptfaserbündel  $R$ . Dieser ergibt eine kovariante Ableitung  $\nabla^E$  im Vektorbündel  $E = R \times_{SO(n) \times Z_2} R^1$ . Durch  $\chi(\hat{s}) = [\hat{s}, 1]$

liefert der lokale Schnitt  $\hat{s}: V \rightarrow R$  einen Schnitt im Vektorbündel  $E$  über  $V$ , für welchen

$$\nabla^E(\chi(\hat{s})) = 0$$

gilt. Damit haben wir  $\nabla^E$  im wesentlichen beschrieben. Die zu den Spin-Strukturen  $P_1, P_2$  gehörigen Dirac-Operatoren bezeichnen wir mit  $D_1, D_2$ . Weil  $D_1: \Gamma(\mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}^1)$  ein Differentialoperator erster Ordnung und  $\nabla^E$  eine kovariante Ableitung im Vektorbündel  $E$  sind, erhalten wir nach einer allgemeinen Konstruktion (vergl. [26], Kapitel 4) einen Differentialoperator

$$1 \otimes_{\nabla^E} D_1: \Gamma(E \otimes \mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(E \otimes \mathcal{F}^1).$$

Satz 3: Sei  $X^n$  eine zusammenhängende, orientierte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $(Q, \pi, X^n; SO(n))$  das assoziierte  $SO(n)$  - Hauptfaserbündel. Weiterhin seien zwei Spin-Strukturen  $(P_1, \lambda_1), (P_2, \lambda_2)$  von  $Q$  gegeben, welche wir als Elemente  $\mathfrak{S}(P_1, \lambda_1), \mathfrak{S}(P_2, \lambda_2)$  der Gruppe  $H^1(Q; Z_2)$  auffassen

können. Ihre Deformation  $R = \sigma(P_1, \lambda_1) - \sigma(P_2, \lambda_2)$  liegt im Bild des injektiven Homomorphismus  $\mathbb{J}^* : H^1(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(Q; \mathbb{Z}_2)$ . Sei  $E$  das durch  $(\mathbb{J}^*)^{-1}(R)$  eindeutig bestimmte, eindimensionale reelle Vektorbündel, dessen erste Stiefel-Whitney-Klasse  $w_1(E)$  gleich  $(\mathbb{J}^*)^{-1}(R)$  ist, und  $\nabla^E$  die konstruierte kovariante Ableitung in ihm. Dann existiert eine natürliche Isomorphie

$\beta : E \otimes \mathcal{Y}^1 \longrightarrow \mathcal{Y}^2$  derart, daß der Operator  $D_2$  in den Operator  $1 \otimes_{\nabla^E} D_1$  übergeht:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E \otimes \mathcal{Y}^1) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \Gamma(\mathcal{Y}^2) \\ \downarrow 1 \otimes_{\nabla^E} D_1 & & \downarrow D_2 \\ \Gamma(E \otimes \mathcal{Y}^1) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \Gamma(\mathcal{Y}^2) \end{array}$$

Beweis: Wir müssen nur die Kommutativität des letzten Diagramms nachprüfen, und dies kann lokal geschehen. Ist  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y}^1; V)$  ein Schnitt in  $\mathcal{Y}^1$  über  $V$  und  $u(\varepsilon) \in \Delta_n$  eine Basis von  $\Delta_n$ , so stellen wir  $\psi$  in der Form

$$\psi = \sum_{\varepsilon} A^\varepsilon \eta(\varepsilon)$$

dar. Dann gilt nach Definition von  $\beta$  (vergl. Beweis von Satz 1)

$$\begin{aligned} \beta(\chi(\hat{s}) \otimes \psi) &= \sum_{\varepsilon} A^\varepsilon \beta([\hat{s}_1, \hat{s}_2], 1] \otimes [\hat{s}_1, u(\varepsilon)]) \\ &= \sum_{\varepsilon} A^\varepsilon [\hat{s}_2, u(\varepsilon)] \end{aligned}$$

und somit

$$D_2 \beta(\chi(\hat{s}) \otimes \psi) = \sum_{j=1}^n \sum_{\varepsilon} s_j(A^\varepsilon) s_j \cdot [\hat{s}_2, u(\varepsilon)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \sum_{\varepsilon} A^\varepsilon \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m} \omega_{1m}(s_j) s_j \cdot [\hat{s}_2, e_1 e_m u(\varepsilon)]$$

Aus  $\nabla^E \chi(\hat{s}) = 0$  folgt andererseits (vergl. [26])

$$(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(\chi(\hat{s}) \otimes \psi) = \chi(\hat{s}) \otimes D_1(\psi)$$

und somit

$$\beta(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(\chi(\hat{s}) \otimes \psi) = \beta([\hat{s}_1, \hat{s}_2], 1] \otimes \sum_{j=1}^n s_j \cdot \nabla_{s_j}^{\mathcal{Y}^1} \psi$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{\mathcal{E}} \left[ \hat{s}_2, s_j(A^{\mathcal{E}}) e_j u(\mathcal{E}) + \frac{1}{2} A^{\mathcal{E}} \sum_{1 \leq m} \omega_{\ln(s_j)} e_j e_1 e_m u(\mathcal{E}) \right].$$

Daraus erhalten wir

$$D_2 \beta(\gamma(\hat{s}) \otimes \psi) = \beta(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(\gamma(\hat{s}) \otimes \psi)$$

und dann für jede glatte Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  auch

$$\begin{aligned} D_2 \beta(f \gamma(\hat{s}) \otimes \psi) &= D_2 \beta(\gamma(\hat{s}) \otimes f \psi) = \beta(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(\gamma(\hat{s}) \otimes f \psi) \\ &= \beta(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(f \gamma(\hat{s}) \otimes \psi). \end{aligned}$$

Weil  $E$  eindimensional ist, folgt

$$D_2 \beta = \beta(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)$$

und Satz 3 ist bewiesen.

Liegt eine nichttriviale Komplexifizierung  $E^{\mathbb{C}}$  des Vektorbündels  $E$  vor, so können wir nicht mehr über die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur sagen. Daher wenden wir uns jetzt dem Fall zu, daß  $E^{\mathbb{C}}$  ein topologisch-triviales, eindimensionales, komplexes Vektorbündel ist (vergl. Folgerung 1). Dann kann ein nichtverschwindender Schnitt  $e \in \Gamma(E^{\mathbb{C}})$  zwar gewählt werden, aber nicht kanonisch, nicht geometrisch angepaßt. Daher hängen die weiteren Überlegungen von der Auswahl eines derartigen Schnittes  $e \in \Gamma(E^{\mathbb{C}})$  ab. Dieser induziert durch

$$\nabla_t^E(e) = w^e(t) \cdot e$$

eine komplexwertige 1-Form  $w^e$ . Wir bemerken, daß man den Schnitt  $e$  so wählen kann, daß  $w^e$  eine rein imaginäre Form ist, also die Gestalt  $w^e = i \cdot w_1^e$  mit einer reellen Form  $w_1^e$  annimmt. Um dies einzusehen führt man eine zu  $\nabla^E$  angepaßte hermitesche Metrik  $(\cdot, \cdot)$  in  $E^{\mathbb{C}}$  ein und fordert  $(e, e) = 1$ . Durch Differenzieren folgt dann  $w^e + \overline{w^e} = 0$ . Wir wollen annehmen, daß der Schnitt  $e$  auf diese Weise gewählt wurde. Weiterhin stellen wir fest, daß  $w^e$  eine geschlossene Form ist,  $dw^e = 0$ . Lokal läßt sich nämlich der parallele Schnitt  $\gamma(\hat{s})$  in Abhängigkeit von  $e$  darstellen:

$\gamma(\hat{s}) = f \cdot e$ ,  $f \neq 0$ : Aus  $\nabla^E \gamma(\hat{s}) = 0$  folgt dann

$$\begin{aligned} df \cdot e + f \cdot w^e \cdot e &= 0 \\ df + f \cdot w^e &= 0 \\ df \wedge w^e + f \cdot dw^e &= 0 \\ f \cdot dw^e &= 0 \end{aligned}$$

und wegen  $f \neq 0$  erhalten wir  $dw^e = 0$ .

Der 1-Form  $w^e$  entspricht ein Vektorfeld  $t^e$ , welches gleichfalls imaginär und der Gestalt  $t^e = i \cdot t_1^e$  mit einem reellen Vektorfeld  $t_1^e$  ist.

Mittels der Isomorphie  $\beta: E \otimes \mathcal{Y}^1 \longrightarrow \mathcal{Y}^2$  und dem gewählten Schnitt  $e \in \Gamma(E^e)$  können wir  $\mathcal{Y}^1$  mit  $\mathcal{Y}^2$  identifizieren und somit  $D_2$  als einen Operator im Bündel  $\mathcal{Y}^1$  auffassen. Dann gilt für das Quadrat  $(D_2)^2$  des Dirac-Operators  $D_2$  folgender

Satz 4:  $(D_2)^2$  zerfällt in die Summe  $(D_2)^2 = A_2 + A_1 + A_0$  von Differentialoperatoren  $A_j$  der Ordnung  $j = 0, 1, 2$ , wobei

$A_2 = (D_1)^2$ ,  $A_1 = -2i \cdot \nabla_{t_1^e}^{\mathcal{Y}^1}$  und  $A_0$  die Multiplikation mit  $A_0 = -i \cdot \text{div}(t_1^e) + |t_1^e|^2$  sind.

Beweis: Vor allem drücken wir  $D_2$  durch  $D_1$  und  $w^e$  aus. Sei  $e_1, \dots, e_n$  ein orthonormales Reper von Vektorfeldern und  $g_1, \dots, g_n$  ein System von Funktionen mit  $dg_i(e_j)(x) = \delta_{ij}$  in einem festen Punkt  $x \in X^n$ . Dann gilt (vergl. [26])

$$\begin{aligned} (1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(e \otimes \psi)(x) &= e \otimes D_1 \psi(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^E e \otimes (D_1(g_i \psi) - g_i D_1 \psi)(x). \end{aligned}$$

Wegen  $D_1(g_i \psi) - g_i D_1 \psi = \text{grad}(g_i) \cdot \psi$  erhalten wir

$$(1 \otimes_{\nabla^E} D_1)(e \otimes \psi)(x) = e \otimes (D_1 \psi + it_1^e \cdot \psi)(x).$$

Somit schließen wir  $D_2 = D_1 + it_1^e$ . Daraus folgt

$$(D_2)^2 = (D_1)^2 + i(D_1 \circ t_1^e + t_1^e \circ D_1) + |t_1^e|^2.$$

Der Beweis von Satz 4 reduziert sich daher auf den Beweis des folgenden Hilfssatzes:

Lemma 3: Sei  $t$  ein Vektorfeld, dessen entsprechende 1-Form  $w^t$  geschlossen ist. Dann gilt für jeden Schnitt  $\psi \in \Gamma(\Psi)$

$$D(t \cdot \psi) + t \cdot D(\psi) = -2 \nabla_t^{\Psi} \psi - \operatorname{div}(t) \psi .$$

Beweis: In einem orthonormalen Reper  $s_1, \dots, s_n$  haben wir mit  $t = t^i s_i$

$$D(t \cdot \psi) + t \cdot D(\psi) = - \sum_i s_i(t^i) \psi + \sum_{i < j} (s_j(t^i) - s_i(t^j)) s_j s_i \cdot \psi + \sum_{i,j} t^i (s_j \cdot \nabla_{s_j}^{\Psi} (s_i \psi) + s_i s_j \nabla_{s_j}^{\Psi} \psi) .$$

Aus  $dw^t = 0$  folgt  $s_j(t^i) - s_i(t^j) = w^t [s_j, s_i]$  und somit gilt

$$D(t \cdot \psi) + t \cdot D(\psi) = \Omega(\psi) - 2 \nabla_t^{\Psi} \psi , \text{ wobei } \Omega \text{ durch}$$

$$\Omega = - \sum_i s_i(t^i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} w^t [s_j, s_i] s_j s_i + \sum_{i,j} t^i (s_j \cdot \nabla_{s_j}^{\Psi} (s_i \cdot \psi) + s_i s_j \nabla_{s_j}^{\Psi} \psi) + 2 \nabla_t^{\Psi} \psi$$

definiert ist. Wir müssen  $\Omega(\psi) = - \operatorname{div}(t) \psi$  zeigen. Leicht

überzeugt man sich von der Gleichung

$$\Omega(f \psi) = f \Omega(\psi)$$

welche zeigt, daß  $\Omega$  ein Operator nullter Ordnung, also ein Homomorphismus des Spinorbündels ist. Weiterhin zerlegt sich  $\Omega$  gemäß der Graduierung in der Cliffordalgebra in homogene Bestandteile vom Grade 0, 2 und 4:

$$\Omega = \Omega^0 + \Omega^2 + \Omega^4 .$$

Wir berechnen  $\Omega^0$ :

$$\Omega^0 = - \sum_i s_i(t^i) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m} (t^m \omega_{1m}(s_1) - t^1 \omega_{1m}(s_m)) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m} (t^m \omega_{1m}(s_1) - t^1 \omega_{1m}(s_m)) =$$

$$-\sum_i s_i(t^i) + \sum_{i,m} t^m \wedge \theta_{lm}(s_i) = -\sum_i \langle \nabla_{s_i} t, s_i \rangle = -\text{div}(t).$$

$\Omega^4$  verschwindet; dies ist eine direkte Konsequenz aus der für  $\Omega$  angegebenen Formel. Es verbleibt noch  $\Omega^2 = 0$  zu zeigen. Wir erhalten jedoch nach einigen Rechnungen

$$\Omega^2 = \sum_{1 < m} \left\{ w^t [s_1, s_m] + w^t (\nabla_{s_m} s_1 - \nabla_{s_1} s_m) \right\} s_1 s_m$$

und dann folgt  $\Omega^2 = 0$  aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs. Damit ist Lemma 3 und somit auch Satz 4 bewiesen.

Wir zeigen jetzt am Beispiel des flachen Torus  $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$ , wie die entwickelte Methode zur Untersuchung der Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur arbeitet. Sei  $\Gamma$  ein Gitter in  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $v_1, \dots, v_n$

$$\Gamma = \left\{ k_1 v_1 + \dots + k_n v_n : k_i \text{ ganzzahlig} \right\}.$$

Das duale Gitter  $\Gamma^*$  wird dann durch

$$\Gamma^* = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Gamma \text{ ist } \langle w, x \rangle \text{ ganzzahlig} \right\}$$

definiert. Mögen die Vektoren  $v_i$  die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}$$

haben. Wir betrachten  $A = \det(v_1, \dots, v_n)$ ,  $A_i(x) = \det(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n)$  und

$$A_{ij} = \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_{i-1}^1 & 0 & v_{i+1}^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{i-1}^{j-1} & 0 & v_{i+1}^{j-1} & & & & \\ v_{i-1}^j & 1 & v_{i+1}^j & & & & \\ v_{i-1}^{j+1} & 0 & v_{i+1}^{j+1} & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_{i-1}^n & 0 & v_{i+1}^n & \dots & v_n^n \end{pmatrix}$$



Durch  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  erhalten wir ein orthonormales Repet von Vektorfeldern auf  $T^n$ , welches eine Trivialisierung  $Q = T^n \times SO(n)$  und somit eine kanonische Spin-Struktur  $P_1 = T^n \times Spin(n)$  liefert. Im dazu assoziierten Spinorbündel haben wir eine maximale Anzahl linear unabhängiger Schnitte  $\eta(\epsilon)$ , welche außerdem parallel sind,  $\nabla^{\mathcal{P}_1} \eta(\epsilon) = 0$ . Daher können wir  $(D_1)^2$  als den Laplace-Operator  $\Delta$  auffassen.

Sei nun  $P_2$  eine weitere Spin-Struktur, der eine zweifache Überlagerung  $\hat{X} \longrightarrow X^n = T^n$  entspricht, welche die Deformation zwischen  $P_1$  und  $P_2$  liefert. Wir überlegen uns, wie man das Bündel  $E^c$  und einen nichtverschwindenden Schnitt  $e$  in ihm erhalten kann. Mit

$$\Gamma(j) = \left\{ k_1 v_1 + \dots + k_{j-1} v_{j-1} + 2k_j v_j + k_{j+1} v_{j+1} + \dots + k_n v_n : k_i \text{ ganzzahlig} \right\}$$

ergibt  $Y(j) = \mathbb{R}^n / \Gamma(j) \longrightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma = T^n$  eine zweifache Überlagerung. Ein Schnitt in  $E(j) = Y(j) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}$  ist eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$  mit den beiden Eigenschaften:

1.  $f(x + k_i v_i) = f(x) \quad i \neq j$
2.  $f(x + v_j) = -f(x)$ .

Einen solchen Schnitt  $e_j$  erhalten wir etwa durch

$$e_j(x) = e^{\frac{\pi i A_j(x)}{\Lambda}}$$

Wegen  $\partial_k(e_j) = \frac{\pi i}{\Lambda} (-1)^{k+j} A_{jk} e_j$  bekommen wir für die entsprechende 1-Form  $w^{e_j}$

$$w^{e_j}(\partial_k) = \frac{\pi i}{\Lambda} (-1)^{i+j} A_{jk}$$

Man sieht jetzt leicht ein, daß für eine beliebige, zweifache Überlagerung  $\hat{X} \longrightarrow T^n$  das assoziierte Bündel  $E^c = X \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}$  isomorph zum Tensorprodukt einer gewissen Anzahl der konstruierten Bündel  $E(j)$  ist. Daher können wir die Spin-Strukturen des Torus  $T^n$  mittels Folgen  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i = 0, 1$ , numerieren und die

zugehörigen Bündel haben dann die Form

$$E(1)^{a_1} \otimes \dots \otimes E(n)^{a_n},$$

wobei wir hier unter  $E(i)^0$  das 1-dimensionale, triviale Bündel und unter  $E(i)^1$  das Bündel  $E(i)$  selbst verstehen wollen. Durch

$$e^a = e_1^{a_1} \otimes \dots \otimes e_n^{a_n}$$

erhalten wir einen nichtverschwindenden Schnitt in einem solchen Bündel, dessen entsprechende 1-Form  $w^a$  die Gestalt

$$w^a(\partial_k) = \frac{\pi i}{A} \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_j A_{jk}$$

hat. Das Quadrat des zur Spin-Struktur  $a = (a_1, \dots, a_n)$  gehörigen Dirac-Operators  $D^a$  nimmt nach Satz 4 die folgende Form an:

$$(D^a)^2 = \Delta - \frac{2\pi i}{A} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} a_i A_{ij} \partial_j + \frac{\pi^2}{A^2} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_i A_{ij} \right)^2.$$

Die Funktionen  $e_{v^*}(x) = e^{2\pi i \langle v^*, x \rangle}$ ,  $v^* \in \Gamma^*$ , bilden eine Basis von  $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ . Ist  $v_i^*$  eine zu  $v_i$  duale Basis, so gilt

$$(D^a)^2 e_{v^*} = 4\pi^2 / v^* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i v_i^* / 2 e_{v^*}.$$

Fassen wir das Ergebnis zusammen:

**Satz 5:** Sei  $\Gamma$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $v_1, \dots, v_n$  und der dualen Basis  $v_1^*, \dots, v_n^*$ . Die Spin-Strukturen des Torus  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$  werden durch die Folgen  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_i = 0, 1$ , klassifiziert, wobei der kanonischen Spin-Struktur die Folge  $(0, \dots, 0)$  entspricht. Der zur Spin-Struktur  $a = (a_1, \dots, a_n)$  gehörige Dirac-Operator  $D^a$  hat - faßt man ihn mittels der eingeführten Identifikation als einen Operator im trivialen Bündel auf - das folgende Quadrat:

$$(D^2)^2 = \Delta - \frac{2\pi i}{A} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} a_i A_{ij} \partial_j + \frac{\pi^2}{A^2} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_i A_{ij} \right)^2$$

Seine Eigenwerte sind durch  $4\pi^2/v^* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i v_i^*/2$ ,  $v^* \in \Gamma^*$ , gegeben und der zugehörige Eigenunterraum ist  $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ -dimensional.

Folgerung 3 (vergl. [17]):

Nur der zur kanonischen Spin-Struktur des flachen Torus gehörige Dirac-Operator hat einen nichttrivialen Kern.

Folgerung 4: Sei  $\Gamma$  ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  mit der dualen Basis  $v_1^*, \dots, v_n^*$ . Ist  $(a_1, \dots, a_n)$  eine Folge mit  $a_i = 0, 1$ , so gilt asymptotisch bei  $t \rightarrow 0$

$$\sum_{v^* \in \Gamma^*} e^{-4\pi^2 t/v^*/2} \sim \sum_{v^* \in \Gamma^*} e^{-4\pi^2 t/v^* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i v_i^*/2}$$

Der Beweis der Folgerung 4 ergibt sich aus Satz 5 und der Tatsache, daß die asymptotische Entwicklung der Zeta-Funktion des Dirac-Operators nicht von der gewählten Spin-Struktur abhängt (siehe Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit),

### 3.4. Spin-Strukturen homogener Räume.

Das Ziel dieses Abschnittes besteht erstens darin, Satz 3 des Kapitels am Beispiel homogener Riemannscher Räume zu illustrieren. Zweitens wollen wir die Spin-Strukturen solcher Räume näher untersuchen; insbesondere sind wir in der Lage, auf einem Raum  $G/K$  mit zusammenhängenden Gruppen  $G$  und  $K$  eindeutig eine Spin-Struktur auszuzeichnen.

Sei  $G$  eine zusammenhängende, Liesche Gruppe und  $K$  eine abgeschlossene (im allgemeinen nicht zusammenhängende) Untergruppe.

Die zusammenhängende Komponente des Einselementes von  $K$  bezeichnen wir mit  $K_0$ .  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{k}$  sind die Lie-Algebren dieser Gruppen entsprechend. Wir setzen voraus, daß das Paar  $(G, K)$  reduktiv ist. Dies bedeutet, daß es in  $\mathfrak{g}$  einen linearen Unterraum  $\mathfrak{p}$  mit

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$

2.  $Ad(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$  für all  $k \in K$

gibt. Insbesondere folgt  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ . Wir erhalten dann eine Darstellung  $\alpha = Ad|_{\mathfrak{k}}$  der Gruppe  $K$  in  $GL(\mathfrak{p})$ . Gegeben seien weiterhin eine positiv - definite Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\mathfrak{p}$ , welche  $K$  - invariant ist

$$(\alpha(k)x, \alpha(k)y) = (x, y) \quad x, y \in \mathfrak{p}, k \in K,$$

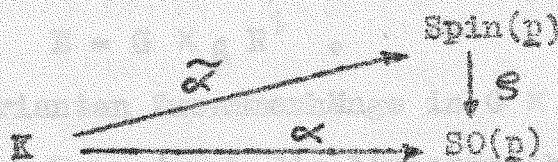
sowie eine Orientierung von  $\mathfrak{p}$ , welche durch  $\alpha$  erhalten wird.

Dann ist  $\alpha : K \longrightarrow SO(\mathfrak{p})$  eine Darstellung von  $K$  in  $SO(\mathfrak{p})$ .

Bemerkung: Alle diese Voraussetzungen sind etwa in folgender Situation erfüllt.  $G$  ist eine beliebige, zusammenhängende Gruppe,  $K_0$  eine kompakte, zusammenhängende Gruppe und es existieren Elemente  $g_1, \dots, g_n$  im Zentrum der Gruppe  $G$  mit  $K = K_0 \cup g_1 K_0 \cup \dots \cup g_n K_0$ . Wählen wir zum Beispiel  $G = SO(2n)$ ,  $K = SO(2n-1) \times \mathbb{Z}_2$ , so erhalten wir den projektiven Raum  $G/K = \mathbb{P}^{2n-1}(\mathbb{R})$ .

Wir betrachten nun den homogenen Raum  $G/K$ . Dessen Tangentialbündel  $T(G/K)$  kann mit  $G \times_{\alpha} \mathfrak{p}$  identifiziert werden. Die Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  und die Orientierung induzieren jeweils eine Riemannsche Metrik und eine Orientierung auf  $G/K$ . Wirkt  $K$  durch  $k \cdot A = \alpha(k) \circ A$ ,  $k \in K$  und  $A \in SO(\mathfrak{p})$ , auf  $SO(\mathfrak{p})$ , so ist das assoziierte Reperbündel  $Q$  isomorph zu  $Q = G \times_K SO(\mathfrak{p})$ .

Definition: Eine homogene Spin-Struktur des Raumes  $G/K$  ist ein Homomorphismus  $\tilde{\alpha} : K \longrightarrow Spin(\mathfrak{p})$  derart, daß



kommutiert.

Bemerkung: Eine homogene Spin-Struktur in diesem Sinne induziert eine gewöhnliche Spin-Struktur des Hauptfaserbündels  $Q$ . Ist gegeben, so lassen wir  $K$  auf  $\text{Spin}(p)$  mittels

$$k \cdot A = \tilde{\alpha}(k) \cdot A \quad k \in K, A \in \text{Spin}(p)$$

wirken und betrachten  $P = G \times_K \text{Spin}(p)$  mit der sich natürlich ergebenden Überlagerung  $\lambda : P \rightarrow Q$ . Dann ist  $(P, \lambda)$  eine Spin-Struktur. Für sie schreiben wir mitunter auch  $(P(\tilde{\alpha}), \lambda)$ . Das assoziierte Spinorbündel  $\mathcal{Y} = P \times_{\text{Spin}} \Delta$  kann dann in der Form

$$\mathcal{Y} = G \times_{\tilde{\alpha}} \Delta$$

mit  $\tilde{\alpha} : K \rightarrow \text{Spin}(p) \rightarrow \text{GL}(\Delta)$  dargestellt werden. Damit haben wir eine Zuordnung

$$\{ \text{homogene Spin-Struktur von } G/K \} \implies \{ \text{Spin-Struktur von } Q \}$$

erhalten. Wir werden sehen, daß diese Zuordnung injektiv ist.

Surjektiv wird sie aus verständlichen Gründen im allgemeinen nicht ausfallen.

Satz 6: Habe  $G/K$  eine homogene Spin-Struktur  $\tilde{\alpha} : K \rightarrow \text{Spin}(p)$ .

1. Jede homogene Spin-Struktur  $\tilde{\alpha}_1 : K \rightarrow \text{Spin}(p)$  ist der Form  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} \cdot \beta$  mit  $\beta \in \text{Hom}(K/K_0; \mathbb{Z}_2)$ . Somit sind alle homogenen Spin-Strukturen durch  $\text{Hom}(K/K_0; \mathbb{Z}_2)$  klassifiziert.
2. Sind die homogenen Spin-Strukturen durch  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} \cdot \beta$  verbunden, so gilt für die assoziierten Spinorbündel

$$\mathcal{Y}^1 = \mathcal{Y} \otimes (G \times_{\beta} \mathbb{R}^1)$$

3. Sind  $\tilde{\alpha}_1$  und  $\tilde{\alpha}$  zwei homogene Spin-Strukturen mit  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} \cdot \beta$  und  $(P(\tilde{\alpha}_1), \lambda), (P(\tilde{\alpha}), \lambda)$  die ihnen entsprechenden Spin-Strukturen, so ist das in Abschnitt 3.2. konstruierte Vektorbündel  $E$  isomorph zu

$$E = G \times_{\beta} \mathbb{R}^1$$

4. Die  $G$ -invarianten Zusammenhänge in  $G \times_{\beta} \text{GL}(\mathbb{R}^1)$  werden nach dem Satz von Wang durch die linearen Abbildungen  $M : p \rightarrow \underline{g}(\mathbb{R}^1)$

mit  $M(\alpha(k)x) = M(x)$ ,  $k \in K$  und  $x \in \mathfrak{p}$ , klassifiziert. Dann ist  $\nabla^E$  die von dem zu  $M = 0$  gehörigen Zusammenhang induzierte kovariante Ableitung.

5. Die Zuordnung

$$\{ \text{homogene Spin-Struktur von } G/K \} \Rightarrow \{ \text{Spin-Struktur von } Q \}$$

ist injektiv.

Beweis von 1:

Seien  $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_1 : K \rightarrow \text{Spin}(\mathfrak{p})$  zwei homogene Spin-Strukturen.

Aus  $\xi \tilde{\alpha}_1 = \alpha = \xi \tilde{\alpha}$  folgt  $\xi \circ (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}^{-1}) = 1$  und somit

nimmt  $\beta = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}^{-1} : K \rightarrow \text{Spin}(\mathfrak{p})$  nur die Werte  $\{1, -1\}$  an.

Wegen

$$\begin{aligned} \beta(k \cdot k_1) &= \tilde{\alpha}_1(k \cdot k_1) \cdot \tilde{\alpha}^{-1}(k \cdot k_1) = \tilde{\alpha}_1(k) \beta(k_1) \tilde{\alpha}^{-1}(k) = \\ &= \beta(k) \beta(k_1) \end{aligned}$$

ist  $\beta$  ein Homomorphismus von  $K$  nach  $Z_2$ , welcher auf  $K_0$  identisch eins ist und somit als ein Element aus  $\text{Hom}(K/K_0; Z_2)$  aufgefaßt werden kann.

Beweis von 2:

$$Y^1 = G \times_{\tilde{\alpha}_1} \Delta = G \times_{\tilde{\alpha} \circ \beta} (\Delta \otimes R^1) = Y \otimes (G \times_{\beta} R^1).$$

Beweis von 3: Sind zwei homogene Spin-Strukturen  $\tilde{\alpha}_1$  und  $\tilde{\alpha}$  mit  $\tilde{\alpha}_1 = \alpha \cdot \beta$  gegeben, so ersieht man aus der Definition der Deformation  $R$  ihrer Spin-Strukturen  $(P(\tilde{\alpha}_1), \lambda)$  und  $(P(\tilde{\alpha}), \lambda)$  sofort, daß

$$R = G \times_{\alpha \times \beta} (SO(\mathfrak{p}) \times Z_2)$$

gilt. Daraus folgt

$$E = R \times_{SO(n) \times Z_2} R^1 = G \times_{\beta} R^1.$$

Beweis von 5: Gilt  $(P(\tilde{\alpha}_1), \lambda) = (P(\tilde{\alpha}), \lambda)$ , so ist  $E$  ein topologisch triviales Bündel. Wegen  $E = G \times_{\beta} R^1$  existiert dann eine stetige Funktion  $f : G \rightarrow R^1$  mit der Invarianzbedingung  $f(gk) = \beta(k)f(g)$  und welche außerdem nirgends verschwindet.

Weil  $G$  zusammenhängend ist, erhalten wir daraus  $\beta = 1$  und somit

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha .$$

Beweis von 4: Wird der Levi-Civita-Zusammenhang  $Z$  auf  $G/K$  mittels

des Satzes von Wang durch  $M : \mathfrak{p} \longrightarrow \underline{SO}(\mathfrak{p})$  beschrieben, so wird

der auf das Deformationsbündel  $R = G \times_{\alpha \times \beta} (\underline{SO}(\mathfrak{p}) \times Z_2)$  gehobene Zu-

sammenhang  $\hat{Z}$  gleichfalls durch  $M : \mathfrak{p} \longrightarrow \underline{so}(\mathfrak{p}) \times Z_2 = \underline{so}(\mathfrak{p})$  be-

schrieben. Weil  $\underline{SO}(\mathfrak{p})$  auf  $R^1$  trivial wirkt ersieht man, daß beim

Übergang zu  $E = R \times_{SO \times Z_2} R^1$  und Verwendung der Identifikation

$$R \times_{SO \times Z_2} R^1 \approx G \times_{\beta} R^1 \quad \text{die von } \hat{Z} \text{ induzierte kovariante Ableitung}$$

$\nabla^E$  genau in die in der Behauptung 4 angegebene übergeht.

Bemerkung: Die Schnitt  $e$  in  $E = G \times_{\beta} R^1$  identifizieren wir mit

denjenigen Funktionen  $f : G \longrightarrow R^1$ , welche die nachstehende

Invarianzeigenschaft haben:

$$f(gk) = \beta(k^{-1})f(g) \quad k \in K \text{ und } g \in G .$$

Dann ist  $\nabla^E e$  ein Schnitt in  $T^*(G/K) \otimes E = G \times_{\text{Ad}^* \otimes \beta} (\mathfrak{p}^* \otimes R^1)$ .

Wählen wir eine Basis  $X_1, \dots, X_p$  in  $\mathfrak{p}$  und die duale Basis

$w^1, \dots, w^p$  in  $\mathfrak{p}^*$ , so besagt die vierte Behauptung, daß  $\nabla^E e$

durch die Abbildung

$$\sum_{i=1}^p w^i \otimes X_i(f) : G \longrightarrow \mathfrak{p}^* \otimes R^1$$

gegeben ist.

Wir wenden uns jetzt der näheren Untersuchung der Spin-Strukturen

des Raumes  $G/K$  in dem Fall zu, daß sowohl  $G$  als auch  $K$  zusammen-

hängende Gruppen sind. Dann existiert höchstens eine homogene

Spin-Struktur und es existiert genau eine, falls die Isotropiedar-

stellung  $\alpha : K \longrightarrow \underline{SO}(\mathfrak{p})$  den trivialen Homomorphismus

$$\alpha_{\#} : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(\underline{SO}(\mathfrak{p})) \text{ induziert. Gilt dies, so haben}$$

wir offenbar eine ausgezeichnete Spin-Struktur des Raumes  $G/K$ . Wir

wollen nun eine Spin-Struktur  $\mathcal{S}(G/K)$  von  $G/K$  im allgemeinen Fall

so auszeichnen, daß  $\mathcal{S}(G/K)$  die homogene Spin-Struktur von  $G/K$  ist, falls eine derartige existiert. Dabei fassen wir die Spin-Strukturen als Elemente von  $H^1(Q; Z_2)$  auf, deren Einschränkung auf die Fasern verschwindet. Bezeichne  $\mathcal{K} : G \times SO(p) \longrightarrow Q = G \times_K SO(p)$  die Projektion und  $j : G \longrightarrow G \times SO(p)$  die Einbettung.

Satz 7: Es existiert genau eine Spin-Struktur  $\mathcal{S}(G/K) \in H^1(Q; Z_2)$  von  $G/K$  mit der Eigenschaft  $j^* \mathcal{K}^*(\mathcal{S}) = 0$ . Besitzt  $G/K$  eine homogene Spin-Struktur, so ist diese gleich  $\mathcal{S}(G/K)$ .

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß höchstens ein Element  $\mathcal{S} \in H^1(Q; Z_2)$  mit  $\mathcal{S}|_{\text{Faser}} \neq 0$  und  $j^* \mathcal{K}^*(\mathcal{S}) = 0$  existiert. Weil

$\mathcal{K} : G \times SO(p) \longrightarrow Q$  eine Faserung mit zusammenhängender Faser  $K$  ist, fällt  $\mathcal{K}^* : H^1(Q; Z_2) \longrightarrow H^1(G \times SO(p); Z_2)$  injektiv aus. Weiterhin kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(Q; Z_2) & \xrightarrow{\mathcal{K}^*} & H^1(G \times SO(p); Z_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\text{Faser}; Z_2) = H^1(SO(p); Z_2) & \longrightarrow & H^1(G; Z_2) + H^1(SO(p); Z_2) \end{array}$$

Aus  $\mathcal{S}_1|_{\text{Faser}} \neq 0 \neq \mathcal{S}_2|_{\text{Faser}}$  und  $j^* \mathcal{K}^*(\mathcal{S}_1) = 0 = j^* \mathcal{K}^*(\mathcal{S}_2)$  folgt dann  $\mathcal{K}^*(\mathcal{S}_1) = \mathcal{K}^*(\mathcal{S}_2)$  und somit

$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ . Wir beweisen nun, daß  $\mathcal{S}(G/K)$  existiert.

Aus der Exaktheit von

$$\dots \longrightarrow \mathcal{K}_1(K) \longrightarrow \mathcal{K}_1(G \times SO(p)) \xrightarrow{\mathcal{K}_\#} \mathcal{K}_1(Q) \longrightarrow 0$$

ergibt sich, daß  $\mathcal{K}_\#(\mathcal{K}_1(G))$  eine Untergruppe vom Index 2 in  $\mathcal{K}_1(Q)$  ist und somit ein Element  $\mathcal{S}(G/K)$  aus  $H^1(Q; Z_2)$  definiert. Leicht prüft man nach, daß dieses so erhaltene Element die beschriebene Eigenschaft hat.

Habe nun  $G/K$  die homogene Spin-Struktur  $\mathcal{S} : K \longrightarrow \text{Spin}(p)$ .

Dann kommutiert



$$\begin{array}{ccc}
 G \times \text{Spin}(p) & \xrightarrow{\quad} & P(\tilde{\alpha}) = G \times_{\tilde{\alpha}} \text{Spin}(p) \\
 \downarrow & & \downarrow \lambda \\
 G \times \text{SO}(p) & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & Q
 \end{array}$$

und wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & \pi_1(G \times \text{Spin}(p)) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(P(\tilde{\alpha})) & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \lambda_{\#} & & \\
 \dots & \rightarrow & \pi_1(G \times \text{SO}(p)) & \xrightarrow{\quad \pi_{\#} \quad} & \pi_1(Q) & \xrightarrow{\quad} & 0
 \end{array}$$

in welchem die Zeilen exakt sind. Daraus schließen wir

$H(P(\tilde{\alpha}) ; \lambda) = \pi_{\#}(\pi_1(G))$  und somit wird die homogene Spin-Struktur  $(P(\tilde{\alpha}), \lambda)$  durch  $\mathcal{G}(G/K)$  beschrieben (siehe Abschnitt 3.1. dieser Arbeit).

Bemerkung: Auf  $G/K$  haben wir somit eine ausgezeichnete Spin-Struktur. Wir beschreiben kurz, wie man diese erhält, falls die Isotropiedarstellung  $\alpha : K \rightarrow \text{SO}(p)$  sich nicht zu einem Homomorphismus  $\tilde{\alpha} : K \rightarrow \text{Spin}(p)$  hebt. In diesem Fall induziert  $\ker(\alpha_{\#})$  eine zweifache zusammenhängende Überlagerung

$\xi : \hat{K} \rightarrow K$  und  $\alpha \xi : \hat{K} \rightarrow \text{SO}(p)$  hebt sich zu einem Homomorphismus  $\alpha \hat{\xi} : \hat{K} \rightarrow \text{Spin}(p)$ . Wirkt  $\hat{K}$  mittels  $\xi$  auf  $G$ , so ist  $P = G \times_{\alpha \hat{\xi}} \text{Spin}(p)$  mit der natürlich sich ergebenden Überlagerung  $\lambda : P \rightarrow Q$  die durch  $\mathcal{G}(G/K)$  beschriebene Spin-Struktur. Wir bemerken letztlich, daß die Gruppe  $G$  von rechts auf  $P$  so wirkt, daß diese Wirkung mit der Struktur des Spin-Gauptfaserbündels auf  $P$  und mit der Überlagerung  $\lambda : P \rightarrow Q$  ist.

3.5. Anhang:

Die ganzzahligen Kohomologiegruppen des reellen, projektiven Raumes sind:

$$\begin{array}{lll}
 H^0(P^5 ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} & H^1(P^5 ; \mathbb{Z}) = 0 & H^2(P^5 ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \\
 H^3(P^5 ; \mathbb{Z}) = 0 & H^4(P^5 ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 & H^5(P^5 ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Für die nichttrivialen Elemente  $x_2$  und  $y_4$  von  $H^2$  beziehungsweise  $H^4$  gilt dann

$$x_2^2 = y_4 \cdot$$

Um dies einzusehen, betrachten wir die exakte Folge der Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{A} \mathbb{Z} \xrightarrow{B} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

in welcher A die Multiplikation mit 2 und B die Reduktion modulo 2 ist. Diese induziert eine exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\beta} H^i(\mathbb{P}^5; \mathbb{Z}) \xrightarrow{A_*} H^i(\mathbb{P}^5; \mathbb{Z}) \xrightarrow{B_*} H^i(\mathbb{P}^5; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} \dots$$

mit dem Bockstein-Homomorphismus  $\beta$  (vergl. [30]). Mittels dieser Sequenz schließt man unschwer, daß  $B_*$  für  $i = 2, 4$  eine Isomorphie ist. Wegen  $H^*(\mathbb{P}^5; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1] / (w_1^6)$  (vergl. [30]) folgt dann  $B_*(x_2) = w_1^2$  und  $B_*(y_4) = w_1^4$ . Somit gilt

$$B_*(x_2^2) = w_1^4 = B_*(y_4)$$

und weil  $B_*$  eine Isomorphie ist erhalten wir  $x_2^2 = y_4 \cdot$

#### 4. Einige Spektraleigenschaften des Dirac - Operators.

Eine interessante Aufgabe globaler Differentialgeometrie besteht darin, den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des Dirac - Operators und der Geometrie des zugrundeliegenden Raumes zu studieren. Im vierten Kapitel der vorliegenden Arbeit untersuchen wir in dieser Richtung einige Spektraleigenschaften des Dirac - Operators. Wir beschreiben dabei den Weg, daß wir das asymptotische Verhalten der Zeta-Funktion des Operators  $D^2$  nahe  $t = 0$  betrachten. Die dargelegten Resultate sind Gegenstand der Arbeit [7] und wurden vom Autor in Zusammenarbeit mit H. Dlubek erzielt.

#### 4.1. Die Fundamentallösung und die Zeta-Funktion eines elliptischen Operators.

Sei  $X^n$  eine glatte, kompakte,  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand und  $E$  ein komplexes Vektorbündel mit hermitischer Metrik über ihr. Den Raum der glatten Schnitte dieses Vektorbündels bezeichnen wir mit  $\Gamma(E)$ . Die Metrik in  $E$  gestattet es, mit jedem Differentialoperator  $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  den zu ihm adjungierten  $P^* : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  zu betrachten, welcher durch die Gleichung

$$\int_X (Ps, s') = \int_X (s, P^*s') \quad s, s' \in \Gamma(E)$$

eindeutig definiert wird. Ist  $P$  elliptisch der Ordnung  $m$ , so untersucht man das Cauchy - Problem der zum Operator  $P$  gehörigen Wärmeleitungsgleichung (WLG):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + PP^* u(x,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Für  $t \geq 0$ ,  $f \in L^2(E)$  und  $u(\cdot, t) \in \Gamma(E)$ .

Es ist wohlbekannt (vergl. [2], [29]), daß im Bündel  $E \otimes E$

über  $X \times X$  ein Schnitt  $E(x, y, t)$  ( $t \geq 0$ ) existiert - die sogenannte Fundamentallösung des Cauchy - Problems der WLG - , welche durch die nachstehenden drei Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist:

1.  $E$  ist einmal in  $t$  und  $2m -$  mal in  $x$  und  $y$  differenzierbar.
2.  $\frac{\partial}{\partial t} E(x, y, t) + (PP^*)_{x} E(x, y, t) = 0$
3. Für alle  $s \in \Gamma(E)$  und alle  $x \in X$  gilt

$$s(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_X E(x, y, t) s(y) dy .$$

Die Spur der Fundamentallösung

$$\zeta(t) = \int_X \text{Tr } E(x, x, t) dx$$

ist die Zeta-Funktion des Operators  $PP^*$  , die sich bekanntlich (vergl. [2] , [29] ) durch die Eigenwerte  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \dots$  und die Dimensionen  $m_0 , m_1 , \dots$  der entsprechenden Eigenunter-räume dieses Operators durch die Formel

$$\zeta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}$$

ausdrücken läßt. Von Interesse ist das asymptotische Verhalten dieser Funktion an der Stelle  $t = 0$ . Nach Seeley (vergl. [2] , [29] ) ist das asymptotische Verhalten der Funktion  $\zeta(t)$  für  $t \rightarrow 0$  durch

$$\zeta(t) \sim t^{-n/2m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (PP^*) t^k$$

mit den Koeffizienten  $a_k(PP^*) = \int_X \mu_k$  gegeben, wobei die Maße

$\mu_k$  durch eine lokale Konstruktion aus dem Operator  $P$  erhalten werden können. Diese Koeffizienten wurden für eine Reihe spezieller Operatoren bereits berechnet ( vergl. [6] , [21] , [29] im Fall

$PP^*$  = Laplace-Operator einer Riemannschen Mannigfaltigkeiten auf Funktionen, sowie [14] für den Laplace-Operator auf Formen; siehe auch [15]).

Da wir für den Dirac-Operator eine geometrische Konstruktion der Fundamentallösung angeben und daraus die ersten Koeffizienten der Asymptotenentwicklung der zu  $D^2$  gehörigen Zeta-Funktion erhalten wollen, beschreiben wir die Konstruktion der Fundamentallösung etwas näher. Wir beschränken uns mit Hinblick auf diese Anwendung auf Operatoren der Ordnung 1.

Zwei von einem Parameter  $t \geq 0$  stetig abhängende Schnitte  $A(x,y,t)$ ,  $B(x,y,t)$  in  $E \boxtimes E$  über  $X \times X$  kann man nach der Formel

$$(A * B)(x,y,t) = \int_0^t \int_X A(x,u,t-\tau) B(u,y,\tau) \, du \, d\tau$$

faßt und erhält somit wiederum einen vom Parameter  $t \geq 0$  stetig abhängenden Schnitt  $(A * B)(x,y,t)$  in dem gleichen Bündel. Wenden wir diese Operation mehrfach auf ein und denselben Schnitt  $A$  an, so schreiben wir  $A * \dots * A = A^{*k}$ .

Gegeben sei eine ganze Zahl  $k > n/2 + 2$ . Unter einer Parametrix verstehen wir einen Schnitt  $W(x,y,t)$  ( $t > 0$ ) in  $E \boxtimes E$  über  $X \times X$  mit folgenden drei Eigenschaften:

1.  $(\frac{\partial}{\partial t} + PP^*) W(x,y,t)$  läßt sich stetig auf  $t=0$  fortsetzen.

2.  $s(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_X W(x,y,t) \circ s(y) \, dy$   $s \in \Gamma(E)$ .

3. Es existiert ein  $T > 0$  und eine Konstante  $C$ , so daß für alle  $0 \leq t \leq T$  gilt:

$$\left| (\frac{\partial}{\partial t} + PP^*) W(x,y,t) \right| \leq C t^{k-n/2}.$$

Lemma 1: Ist  $W$  eine Parametrix, so gilt:

1. Die Reihe  $Q = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial t} + PP^* \right) W^{*i}$  ist konvergent und definiert einen vom Parameter  $t \geq 0$  stetig abhängenden Schnitt in  $E \otimes E$ .
2.  $E - W - W^*Q$  ist die Fundamentallösung der WLG zum Operator  $P$ .
3. Für kleine  $t$  gilt

$$\| E(x,y,t) - W(x,y,t) \| \leq C t^{k - n/2 + 1}$$

Beweis: Der Beweis entspricht dem in [6] für den Laplace-Operator auf Funktionen gegebenen. Den Operator  $\partial/\partial t + PP^*$  bezeichnen wir mit  $Z$  und beweisen zuerst, daß  $Q$  gleichmäßig konvergiert. Aus der dritten Eigenschaft der Parametrix ergibt sich

$$\| ZW(x,y,t) \| \leq C = C T^{k - n/2} \quad \text{für alle } x,y \in X, t \in [0, T].$$

Ist  $V$  das Volumen von  $X$ , so ergibt eine mehrfache Anwendung der Faltungsgleichung die Abschätzung ( $0 \leq t \leq T$ )

$$\| (ZW)^{*i}(x,y,t) \| \leq \frac{C^i V^{i-1} T^{i-1}}{(i-1)!} \leq \frac{C^i V^{i-1} T^{i-1}}{(i-1)!}$$

Damit hat  $Q$  die Majorante

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C^i V^{i-1} T^{i-1}}{(i-1)!} = C e^{CVT}$$

und konvergiert gleichmäßig gegen einen stetigen Schnitt. Eine direkte Rechnung zeigt (vergl. [6]), daß die Differenz  $W - W^*Q$  die charakteristische Eigenschaften der Fundamentallösung erfüllt und somit ergibt sich  $E = W - W^*Q$ . Wir zeigen nun die dritte in Lemma 1 behauptete Eigenschaft. Aus

$$\| ZW(x,y,t) \| \leq C t^{k - n/2} \quad \text{folgt wir oben die Abschätzung}$$

$$\| Q(x,y,t) \| \leq C_1 t^{k - n/2}$$

welche zeigt, daß der Schnitt  $R(x,y,t) = t^{-(k - n/2)} Q(x,y,t)$

in  $t = 0$  beschränkt ist. Es ist

$$(W * Q)(x, y, t) = \int_0^t \int_X \tau^{k - n/2} W(x, u, t - \tau) \circ R(u, y, \tau) \, du \, d\tau .$$

Die zweite Eigenschaft der Parametrix liefert

$$\lim_{\delta \rightarrow t} \int_X W(x, u, t - \delta) \circ R(u, y, \delta) \, du = R(x, y, t)$$

und sichert somit die Beschränktheit von

$$\int_X W(x, u, t - \delta) \circ R(u, y, \delta) \, du$$

für  $0 \leq \delta \leq t$ . Daraus erhält man unmittelbar die Behauptung.

Folgerung 1:

$$\zeta(t) = \int_X \text{Tr } W(x, x, t) + o(t^{k - n/2 + 1}) .$$

#### 4.2. Die Konstruktion der Fundamentallösung der zum Dirac-Operator gehörigen Wärmeleitungsgleichung.

Wir betrachten jetzt eine geschlossene, orientierte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit  $X^n$  mit dem assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{S}$ . In diesem Abschnitt der Arbeit konstruieren wir eine Folge von Parametrixen  $W_k$ , welche gemäß Folgerung 1 das asymptotische Verhalten der Zeta-Funktion des Operators  $D^2 = D \circ D^*$  an der Stelle  $t = 0$  beschreiben.

Weil  $X^n$  kompakt ist, existiert eine positive Zahl  $\varepsilon > 0$  so, daß sich jedes Punktepaar der Menge

$$U_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in X \times X : r(x, y) < \varepsilon \right\} ,$$

deren Abstand  $r(x, y)$  kleiner als  $\varepsilon$  ist, durch eine eindeutig bestimmte, minimale Geodätische  $\gamma$  verbinden läßt. Mittels des Exponentials  $\exp_y : T_y X^n \longrightarrow X^n$  führen wir Normalkoordinaten um den Punkt  $y$  ein und definieren auf der Menge  $U_\varepsilon$  eine Funktion  $\Theta = \Theta(x, y)$  durch

$$\Theta(x, y) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}$$

wobei  $g_{ij}$  die Koeffizienten der Metrik in diesem Koordinatensystem sind. Unter der Anwendung eines Differentialoperators auf einen Schnitt oder eine Funktion, welche über  $X^n \times X^n$  definiert sind, verstehen wir im weiteren immer dessen Anwendung auf die erste Variable.

Lemma 2: Sei  $\Psi \in \Gamma(\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y})$  ein Schnitt im Bündel  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  über  $X \times X$  und  $f : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  eine glatte Funktion, welche nur vom Quadrat des geodätischen Abstandes  $r^2 = r^2(x, y)$  abhängt,  $f = f(r^2)$ . Dann gilt über  $U_\varepsilon$

$$D^2(f \Psi)(x, y) = f(D^2 \Psi) - \left( 4r^2 f'' + 2f'(r) \frac{\Theta'}{\Theta} + n \right) \Psi - 4f' \nabla_{\dot{\gamma}(1)} \Psi$$

wobei  $\gamma$  die minimale Geodätische von  $y$  nach  $x$  und  $\dot{\gamma}$  ihre Ableitung ist.

Beweis:  $\Delta$  bezeichne den Laplace-Operator der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Aus der im Abschnitt 2.2. zitierten Lichnerowicz - Formel für  $D^2$  ergibt sich

$$D^2(f \Psi) = f D^2 \Psi + \Delta(f) \Psi - 2 \nabla_{\text{grad}(f)} \Psi$$

Der Laplace-Operator einer nur von  $r$  abhängigen Funktion

$h = h(r) : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$  drückt sich durch

$$\Delta(h) = -h''(r) - h'(r) \left( \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{n-1}{r} \right)$$

aus (vergl. [6]). Andererseits ergibt sich für den Gradienten von  $f$  - indem man in den Normalkoordinaten  $x_1, \dots, x_n$  um  $y$

rechnet und  $g^{ij} x_j = x_i$  sowie  $\dot{\gamma}(1) = x_i \partial / \partial x_i$  benutzt -

$$\text{grad}(f) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f(r^2)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j} g^{ij} f'(r^2) \frac{\partial r^2}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} =$$



$$= \sum_{i,j} g^{ij} f'(r^2) 2x_j \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i f'(r^2) 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$= 2f'(r^2) \mathcal{L}(1).$$

setzen wir in die Formel für  $D^2(f \psi)$  jetzt die Ausdrücke für  $\Delta(f)$  und  $\text{grad}(f)$  ein, so erhalten wir die Behauptung.

Bemerkung: Wegen  $r \frac{\partial}{\partial r} = r \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathcal{L}(1)$

können wir die Formel aus Lemma 2 auch in der Form

$$D^2(f \psi) = f D^2 \psi - (4r^2 f'' + 2f'(r \frac{\partial}{\partial r} + n)) \psi -$$

$$- 4rf' \frac{\partial}{\partial r} \psi$$

schreiben, wobei  $\frac{\partial}{\partial r} \psi$  die kovariante Ableitung im Bündel  $\mathcal{Y}$  des Schnittes  $\psi$  nach dem Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial r}$  bezüglich der ersten Variablen ist.

Für die Konstruktion der Parametrix  $W_k$  benötigen wir einen Schnitt  $I$  in  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  über  $U_\varepsilon$  sowie einen Multiplikationsformalismus von auf  $U_\varepsilon$  definierten Schnitten in diesem Bündel.

Sind  $p_1, p_2$  die Projektionen von  $X \times X$  auf die erste und zweite Achse, so identifizieren wir  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  mit  $\text{Hom}(p_2^*(\mathcal{Y}), p_1^*(\mathcal{Y}))$ .

Einem Schnitt  $\Phi \in \Gamma(\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y})$  entspricht bei dieser Identifikation eine Familie von Homomorphismen  $\Phi(x,y) : \mathcal{Y}_y \longrightarrow \mathcal{Y}_x$ .

Den Schnitt  $I \in \Gamma(\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}; U_\varepsilon)$  erhalten wir nun dadurch, daß wir jedem Punktepaar  $(x,y) \in U_\varepsilon$  die Parallelverschiebung im Bündel  $\mathcal{Y}$  entlang der von diesen beiden Punkten eindeutig bestimmten Geodätischen  $\gamma$  zuordnen.

$$I(x,y) = \tau_\gamma : \mathcal{Y}_y \longrightarrow \mathcal{Y}_x.$$

Ist also  $\{e_i(y)\}$  eine orthonormierte Basis von  $\mathcal{Y}_y$  und  $\{e_i(x)\}$  deren Parallelverschiebung entlang  $\gamma$ , so gilt

$$I(x,y) = \sum_i e_i(x) \otimes e_i(y).$$

sind  $\underline{\Phi}$  und  $\Psi$  zwei Schnitte in  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  über der Menge  $U_\varepsilon$ , so haben wir gemäß der angegebenen Identifikation Homomorphismen

$$\underline{\Phi}(x,y) : \mathcal{Y}_y \longrightarrow \mathcal{Y}_x \quad \text{und} \quad \Psi(x,y) : \mathcal{Y}_y \longrightarrow \mathcal{Y}_x.$$

Durch  $(\underline{\Phi} \circ \Psi)(x,y) = \underline{\Phi}(x,y) I(x,y)^{-1} \Psi(x,y)$  wird ein Homomorphismus  $(\underline{\Phi} \circ \Psi)(x,y) : \mathcal{Y}_y \longrightarrow \mathcal{Y}_x$ , also ein Schnitt  $\underline{\Phi} \circ \Psi$  im Bündel  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  über  $U_\varepsilon$  definiert. In den oben gewählten Basen  $\{e_i(y)\}$  und  $\{e_i(x)\}$  gilt dann mit

$$\underline{\Phi}(x,y) = \sum_{i,j} \varphi^{ij}(x,y) e_i(x) \otimes e_j(y)$$

$$\Psi(x,y) = \sum_{i,j} \psi^{ij}(x,y) e_i(x) \otimes e_j(y)$$

die Formel

$$(\underline{\Phi} \circ \Psi)(x,y) = \sum_{i,j,k} \varphi^{ik}(x,y) \psi^{kj}(x,y) e_i(x) \otimes e_j(y).$$

Über  $U_\varepsilon$  definierte Schnitt kann man nach Vektorfeldern differenzieren. Ist nämlich  $t$  ein auf  $V$  definiertes Vektorfeld und  $\Psi$  ein Schnitt in  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  über  $U_\varepsilon$ , so wird durch

$$\Psi(x,y) = \sum_{i,j} \psi^{ij}(x,y) e_i(x) \otimes e_j(y)$$

$$t(\Psi)(x,y) = \sum_{i,j} t(\psi^{ij}(x,y)) e_i(x) \otimes e_j(y)$$

ein Schnitt  $t(\Psi)$  in  $\mathcal{Y} \boxtimes \mathcal{Y}$  über  $U_\varepsilon \cap (V \times X)$  definiert. Dann gilt

$$\nabla_t^{\mathcal{Y}} (\underline{\Phi} \circ \Psi) = \underline{\Phi} \circ t(\Psi) + (\nabla_t^{\mathcal{Y}} \underline{\Phi}) \circ \Psi.$$

Bemerkung: Aus dieser Formel erhalten wir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}^{\mathcal{Y}} (\Psi) = \frac{\partial}{\partial r} \Psi + \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}^{\mathcal{Y}} I \right) \circ \Psi = \frac{\partial}{\partial r} \Psi.$$

Daher stimmen für das radiale Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial r}$  der Schnitt  $\frac{\partial}{\partial r} (\Psi)$  mit  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}^{\mathcal{Y}} \Psi$  überein, ganz im Sinne der letzten

Bemerkung!

Sei  $f(x, y) = f(r^2) = (4JL t)^{-n/2} e^{-r^2/4t}$ . Zur Konstruktion der gesuchten Parametrix  $W_k$  betrachten wir zuerst einen Schnitt  $H_k$  über  $U_\varepsilon$ ,

$$H_k = \sum_{j=0}^k f U_j t^j,$$

und bestimmen die Schnitte  $U_j$  so, daß

$$\left( D^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) H_k = f D^2(U_k) t^k$$

gilt. Danach erhalten wir  $W_k$  aus  $H_k$ , indem wir  $H_k$  nach vorheriger Glättung außerhalb von  $U_\varepsilon$  Null legen. Aus Lemma 2 berechnen wir

$$\left( D^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) H_k \text{ und bekommen}$$

$$\begin{aligned} \left( D^2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) H_k = f \sum_{j=0}^k \left( D^2(U_{j-1}) + \left( j + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) U_j \right) t^j \\ + f D^2(U_k) t^k. \end{aligned}$$

Die Bedingungen, welche wir an die Schnitte  $U_j$  stellen müssen, lauten demnach

$$\left( \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) U_0 = 0$$

$$D^2(U_{j-1}) + \left( j + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) U_j = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen ergeben folgende Rekursionsformel für die Schnitte  $U_j$  (vergl. [6]):

$$U_0(x, y) = \Theta^{-1/2}(x, y) I(x, y)$$

$$U_j(x, y) = - \Theta^{-1/2}(x, y) \int_0^1 \Theta^{1/2}(z_\xi, y) \xi^{j-1} \cdot$$

$$\cdot \tau_\gamma(z_\xi, x) (D^2(U_{j-1})(z_\xi, y)) d\xi,$$

wobei  $z_\xi = \exp_y(\xi \exp^{-1}(x))$  und  $\tau_\gamma(z_\xi, x)$  die Parallelverschiebung  $\tau$  im Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  von  $z_\xi$  nach  $x$  ist.

Sei nun  $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, 1]$  eine glatte Funktion, die nur vom Quadrat des geodätischen Abstandes abhängt und folgende beiden Eigenschaften hat:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r(x, y) \leq \varepsilon/4 \\ 0 & \text{falls } r(x, y) \geq \varepsilon/2 \end{cases}$$

Satz 1: Für  $k > n/2 + 2$  ist  $W_k = \alpha \cdot H_k$  eine Parametrix.

Beweis: Zu jedem  $1 > 0$  existiert eine Konstante  $C_1$  so, daß für alle  $\varepsilon/4 \leq r \leq \varepsilon/2$  und  $0 \leq t \leq T$  die Abschätzung

$$|f(t)| = \left| (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} \right| \leq C_1 t^1 \quad \langle 1 \rangle$$

gilt. Die erste Eigenschaft, welche an eine Parametrix gestellt wird, ergibt sich für  $W_k$  daraus, daß dieser Schnitt im Bereich  $r(x, y) \geq \varepsilon/4$  auf  $t = 0$  fortsetzbar ist und für  $r(x, y) \leq \varepsilon/4$

$$\begin{aligned} (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) W_k &= (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) H_k = f \cdot D^2(U_k) t^k = \\ &= (4\pi)^{-n/2} e^{-r^2/4t} t^{k-n/2} D^2(U_k) \end{aligned}$$

gilt. Die Abschätzung  $\left| (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) W_k \right| \leq C t^{k-n/2}$

erhalten wir, indem wir die linke Seite jeweils über  $U \in \varepsilon/4$  und  $U \in \varepsilon/2 - U \in \varepsilon/4$  entsprechend unter Verwendung von Lemma 2 und der eingangs erwähnten Eigenschaft  $\langle 1 \rangle$  der Funktion  $f$  wie folgt behandeln:

$$\begin{aligned} \left| (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) W_k \right| &= \left| (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) H_k \right| \leq \\ &\leq (4\pi)^{-n/2} \cdot 1 \cdot \max_{U \in \varepsilon/4} |D^2 U_k| \cdot t^{k-n/2} \end{aligned}$$

$$\left| (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) W_k \right| = \left| D^2(\alpha H_k) + \alpha \frac{\partial}{\partial t} H_k \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \alpha (D^2 + \frac{\partial}{\partial t}) H_k \right| + \left| 4x^2 \alpha^{k-1} + 2\alpha^k \left( r \frac{\partial}{\partial r} + n \right) \right| |H_k| + \\ &\quad + \left| 4\alpha^k r \right| \left| \frac{\partial}{\partial r} H_k \right| \leq \\ &\leq c_1 t^{k-n/2} + c_2 t^{k-n/2} + c_3 t^{k-n/2} \leq c t^{k-n/2}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} W_k(x, y, t) \circ s(y) \, dy$$

indem wir das Integral in die Summe

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : r(x, y) < \varepsilon/4\}} + \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : r(x, y) \geq \varepsilon/4\}}$$

zerlegen. Aus <1> folgt unmittelbar, daß der Grenzwert des zweiten Integrals gleich Null ist. Das verbleibende Integral transformieren wir mittels der Exponentialabbildung  $\exp_x : \mathbb{T}_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und erhalten

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} W_k(x, y, t) \circ s(y) \, dy = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^k t^j \int_{\mathbb{T}_x \mathbb{R}^n} f(x, \exp_x z, t) U_j(x, \exp_x z) \circ s(\exp_x z) \cdot \Theta(x, \exp_x z) \, dz. \end{aligned}$$

$$\text{Aus } \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4t} g(y) \, dy = g(x)$$

folgt nun

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} W_k(x, y, t) \circ s(y) \, dy = U_0(x, x) \circ s(x) \cdot \Theta(x, x) = s(x).$$

Mit Folgerung 1 ergibt sich für die Zeta-Funktion des Operators  $D^2$

Folgerung 2:

$$\zeta(t) \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_{X^n} \text{Tr } U_j(x,x) dx \right) t^j .$$

Bezeichnung:

$$d_j = \int_{X^n} \text{Tr } U_j(x,x) dx .$$

Satz 2: Die Spuren  $\text{Tr } U_j(y,y)$  sind universelle,  $O(n)$ -invariante Polynome im Krümmungstensor  $R = (R_{ijkl})$  des Levi-Civita-Zusammenhangs auf  $X^n$  und seinen Ableitungen. Der Grad  $x_k$ , mit dem die Ableitung  $D^k R$  in einem Monom des die Spur  $\text{Tr } U_j$  bestimmenden Polynoms  $P_j^n$  auftreten kann, wird durch

$$j = \sum_k (1 + k/2) x_k$$

gegeben.

Beweis: Wir beweisen induktiv, daß  $f_j(x,y) = \text{Tr } \tau_{\gamma(x,y)} U_j(x,y)$

in einer Normalumgebung von  $y$  bezüglich  $x$  eine Taylorentwicklung besitzt, deren Koeffizienten universelle Polynome in  $R(y)$ ,  $D^1 R(y)$ , ... sind. Weil sich die Koeffizienten der Metrik in der Form

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikjl} x^k x^l + \dots$$

darstellen lassen (vergl. [2]), besitzt

$$f_0(x,y) = \dim(Y) \cdot (\det(g_{ij}(x)))^{-1/4}$$

eine derartige Entwicklung. Aus der Rekursionsformel für  $U_j$  ergibt sich

$$f_j(x,y) = - \Theta^{-1/2}(x,y) \int_0^1 \Theta^{1/2}(z_{\xi}, y) \xi^{j-1} .$$

$$\cdot \text{Tr } \tau_{\gamma(z_{\xi}, y)} (D^2 U_{j-1}(z_{\xi}, y)) d\xi$$

Benutzen wir die leicht einzusehende Formel

$$t(\text{Tr } \tau \gamma(x,y) W(x,y)) = \text{Tr } \tau \gamma(x,y) (tW(x,y)) ,$$

in welcher  $t$  ein Vektor aus  $T_x(X)$  ist, sowie die Lichnerowicz - Formel für  $D^2$  (Abschnitt 2.2. dieser Arbeit) , so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_j(x,y) = & - \Theta^{-1/2}(x,y) \int_0^1 \Theta^{1/2}(z_\xi, y) \xi^{j-1} \left\{ 1/4 R(z_\xi) \cdot \right. \\ & \cdot f_{j-1}(z_\xi, y) + \Delta f_{j-1}(z_\xi, y) - \\ & - \text{Tr } \tau \gamma(z_\xi, y) \left( \sum_1 \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} I + \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} I \right) \cdot \\ & \cdot f_{j-1}(z_\xi, y) - 2 \sum_1 \text{Tr } \tau \gamma(z_\xi, y) \left( \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} I \right) \cdot \\ & \left. \cdot s_i(f_{j-1})(z_\xi, y) \right\} d\xi . \end{aligned}$$

Aus  $\nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} \circ \epsilon = \sum_{\epsilon^r} \Gamma_{\epsilon}^{\epsilon^r}(s_i) \circ \epsilon^r$  sowie aus der Tatsache, daß  $\Gamma_{\epsilon}^{\epsilon^r}(s_i)$  Linearkombinationen der Zusammenhangskoeffizienten  $\omega_{ij}(s_k)$  des Levi - Civita - Zusammenhangs sind und der Definition des Schnittes  $I$  ergibt sich nun , daß

$$\text{Tr } \tau \gamma(z_\xi, y) \sum \left( \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} I + \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} I \right)$$

und

$$\text{Tr } \tau \gamma(z_\xi, y) \left( \nabla_{s_i}^{\mathcal{P}} I \right)$$

Taylorentwicklungen der gesuchten Art besitzen. Induktiv erhalten wir daraus die Taylorentwicklung von  $f_j(x,y)$  und wegen  $\text{Tr } U_j(y,y) = f_j(y,y)$  die erste Behauptung. Die  $O(n)$  - Invarianz der Polynome erhält man wie in [6] . Die Änderung des Dirac-Operators unter konformer Deformation der Metrik läßt sich durch eine geeignete Identifikation der Spinorbündel durch  $(D^2)^{\mathcal{E}\mathcal{G}} = a^{-1} (D^2)^{\mathcal{E}}$  ( $a$  - konstant) beschreiben. (vergl [17] ). Dieser

Zusammenhang garantiert, daß der in [6] gegebene Beweis der Gleichung  $j = \sum_k (1 + k/2) x_k$  sich auf unseren Fall überträgt.

Nach dem Satz von H. Weyl (vergl. [33]) über die Invarianten der orthogonalen Gruppe erhalten wir aus Satz 2

$$\text{Tr } U_1(y,y) = k(n) R(y)$$

$$\text{Tr } U_2(y,y) = \alpha(n) R(y)^2 + \beta(n) / R(y)^2 + \gamma(n) \xi(y)^2 + \delta(n) \Delta R(y),$$

wobei  $R = R_{jii j}$  die Skalarkrümmung,  $/R/ = \sqrt{R_{ijkl}^2}$  die Länge des Krümmungstensors und  $\xi = \sqrt{\sum_{j,k} (\sum_i R_{jiik})^2}$  die Länge des Ricci - Tensors ist.

#### 4.3. Berechnung der ersten Koeffizienten in der Asymptoten - entwicklung der Zeta - Funktion von $D^2$ .

Wir wenden uns jetzt der Berechnung der ersten Koeffizienten

$$d_j = \int_{X^n} \text{Tr } U_j(x,x) dx \text{ zu. Aus } U_0(x,x) = I(x,x) \text{ folgt unmittel-}$$

bar  $d_0 = \dim(\mathcal{F}) \text{ vol}(X^n)$ . Über die Koeffizienten  $d_1$  und  $d_2$  wissen wir bereits, daß diese die Form

$$d_1 = k(n) \int_{X^n} R(x) dx$$

$$d_2 = \int_{X^n} (\alpha(n) R(x)^2 + \beta(n) / R(x)^2 + \gamma(n) \xi(x)^2) dx$$

haben, wobei  $k(n)$ ,  $\alpha(n)$ ,  $\beta(n)$ ,  $\gamma(n)$  nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit abhängige Größen sind. Um diese zu bestimmen, können wir daher eine Serie von Test-Mannigfaltigkeiten einsetzen - welche die Sphären sein werden - und für sie  $d_1$  und  $d_2$  direkt berechnen. Deshalb wenden wir uns der Untersuchung von  $D^2$  und des konstruierten Schnittes  $I$  auf  $S^n$  zu.



Satz 3: Sei  $S^n$  die Standardkugelsphäre und  $(s_1, \dots, s_n)$  ein orthonormales Reper von Vektorfeldern, welches durch Parallelverschiebung aus einem Punkt  $y \in S^n$  entsteht, Dann gilt in einer Umgebung von  $y$ :

1. 
$$\sum_1 \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I(x,y) = \left( -\frac{n-1}{16} r^2 + c(r^4) \right) I(x,y)$$
2. 
$$\sum_1 \operatorname{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I(x,y) = 0$$

Beweis: Den rein rechnerischen Beweis führen wir in mehreren Schritten.

1. Schritt: Die kovariante Ableitung  $\nabla^{\mathcal{Y}}$  im Spinorbündel wird durch die Formen  $\omega_{ij}(s_k) = (\nabla_{s_k} s_i, s_j)$  des Levi-Civita - Zusammenhangs beschrieben. Daher berechnen wir zuerst für die Sphäre  $S^n$  diese Zusammenhangsformen, wobei das Problem mit Hinblick auf den zu beweisenden Satz darin besteht, für sie Ausdrücke in Abhängigkeit vom geodätischen Abstand  $r$  zu erhalten. Sei  $S^n$  als Einheitskugelsphäre in den euklidischen Raum  $R^{n+1}$  eingebettet und  $e_1, \dots, e_{n+1}$  die Standardbasis dieses. Aus Symmetriegründen können wir  $y = (0, \dots, 0, 1)$  und  $s_k(y) = (y, e_k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , annehmen. Wir müssen  $\nabla_{s_k} s_i$  in einem Punkt  $x_0$  berechnen, dessen Koordinaten wir aus den gleichen Gründen

$$x_0 = (\sin t_0, 0, \dots, 0, \cos t_0)$$

setzen können. Die kovariante Ableitung ist in unserem Fall durch

$$(\nabla_{s_k} s_i)(x_0) = s_k \cdot s_i - (s_k, s_i) x_0$$

gegeben, wobei  $s_k \cdot s_i$  die Differentiation von  $s_i$  nach  $s_k$  ist.

Daraus erhalten wir

$$\omega_{ij}(s_k)(x_0) = (s_k \cdot s_i, s_j)(x_0)$$

und somit genügt es, den Vektor  $s_k \cdot s_i$  zu berechnen. Sei vorerst  $k$  größer als 1. Dann gilt  $s_k(x_0) = (x_0, e_k)$  und wir erhalten für die durch  $\gamma_k(0) = x_0$ ,  $\dot{\gamma}_k(0) = s_k(x_0)$  eindeutig bestimmte Geodätische  $\gamma_k(t)$  in  $S^n$  die Formel

$$\gamma_k(t) = \cos t x_0 + \sin t e_k$$

Wir betrachten jetzt die Geodätische  $\delta_k^t$ , welche  $y$  mit  $\gamma_k(t)$  verbindet und durch die Formel

$$\delta_k^t(s) = \left( \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0 \sin s, 0, \dots, 0, \frac{\sin t}{\sin \alpha_t} \sin s, 0, \dots, 0, \cos(s) \right)$$

mit  $\sin \alpha_t = \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t_0 + \sin^2 t}$  gegeben ist. Deren Tangentialvektor im Punkte  $s = 0$  ist

$$\dot{\delta}_k^t(0) = \left( \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \dots, 0, \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \dots, 0 \right)$$

und somit gilt:

a.)  $(s_i(y), \dot{\delta}_k^t(0)) = 0$  für  $i \neq 1, k$

b.) 
$$s_1(y) = \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0 \dot{\delta}_k^t(0) + \frac{\sin t}{\sin \alpha_t} \left( \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \dots, 0, -\frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \dots, 0 \right)$$

mit

$$\left( \dot{\delta}_k^t(0), \left( \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \dots, 0, \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \dots, 0 \right) \right) = 0$$

Weil  $s_i(\gamma_k(t))$  aus  $s_i(y) = (y, e_i)$  durch Parallelverschiebung entlang  $\delta_k^t$  entsteht, erhalten wir folgende Ausdrücke für

$s_i(\gamma_k(t))$ :

a.)  $s_i(\gamma_k(t)) = (\gamma_k(t), e_i)$   $i \neq 1, k$

b.) 
$$s_1(\gamma_k(t)) = \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0 \dot{\delta}_k^t(\alpha_t) + \frac{\sin t}{\sin \alpha_t} \left( \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \dots, 0, -\frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \dots, 0 \right)$$

Aus  $(s_k \circ s_i)(x_0) = \frac{d}{dt} s_i(\gamma_k(t))|_{t=0}$  folgt man

$$a^{c,c}) \quad (s_k \circ s_i)(x_0) = 0 \quad \text{für } i \neq 1, k.$$

$$b^{c,c}) \quad (s_k \circ s_1)(x_0) = (0, \dots, 0, -\tan(t_0/2), 0, \dots, 0).$$

Dann ergibt sich unter Berücksichtigung von  $t_0 = r(x_0, y) = r_0$

$$\omega_{ij}(s_k) = 0 \quad i \neq 1, k$$

$$\omega_{ij}(s_k) = 0 \quad j \neq k$$

$$\omega_{1k}(s_k) = -\tan(r_0/2)$$

$$\omega_{kj}(s_k) = 0 \quad j \neq 1$$

$$\omega_{k1}(s_k) = -\omega_{1k}(s_k) = \tan(r_0/2)$$

Behandeln wir den Fall  $k = 1$  analog, so erhalten wir insgesamt folgendes Ergebnis

$$\omega_{jl}(s_i)(x_0) = \begin{cases} -\tan(r_0/2) & j = 1, l = i > 1 \\ \tan(r_0/2) & l = 1, j = i > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Schritt: Wir zeigen  $s_i(\omega_{jl}(s_i))(x_0) = 0$ , Aus

$$s_i(\omega_{jl}(s_i)) = (s_i \circ s_i \circ s_j, s_1) + (s_i \circ s_j, s_i \circ s_1)$$

erhalten wir unter Berücksichtigung von  $a^{c,c})$  und  $b^{c,c})$

$$s_i(\omega_{jl}(s_i))(x_0) = (s_i \circ s_i \circ s_j(x_0), s_1(x_0)) =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} (s_j(\gamma_i(t), s_1(x_0)) |_{t=0}$$

Mittels  $a^{c,c})$  und  $b^{c,c})$  schließen wir dann

$$s_i(\omega_{jl}(s_i))(x_0) = 0.$$

3. Schritt: Der Schnitt  $I(x, y)$  wurde dadurch definiert, daß wir

in  $\mathcal{Y}_y$  eine orthonormierte Basis  $e_\epsilon$  wählten, diese parallel im Spinorbündel nach  $x$  verschoben und  $I(x, y) = \sum_{\epsilon} e_\epsilon(x) \otimes e_\epsilon(y)$  setzten. Weil das Reper von Vektorfeldern  $(s_1, \dots, s_n)$  als durch Parallelverschiebung von  $y$  hervorgehend vorausgesetzt ist, haben die in Abschnitt 2.3. definierten Schnitte  $\eta_\epsilon(x) =$

$$= [\hat{s}(x), u_\xi]$$

$\circ \xi(x) = \gamma_\xi(x)$   
Ableitung  $\nabla^y$

die gleiche Eigenschaft. Wir können demnach annehmen. Aus der Formel für die kovariante Ableitung erhalten wir dann

$$\sum_i \nabla_{s_i}^y \nabla_{s_i}^y \circ \xi(x_0) = \sum_i \sum_{l < m} \frac{1}{2} s_i(\omega_{lm}(s_i))(s_l s_m) \circ \xi(x_0) + \sum_i \sum_{l < m} \sum_{p < q} \frac{1}{4} \omega_{lm}(s_i) \omega_{pq}(s_i) s_p s_q s_l s_m \circ \xi(x_0)$$

Aus den Formeln für  $\omega_{ij}(s_k)$  folgt dann unmittelbar

$$\sum_i \nabla_{s_i}^y \nabla_{s_i}^y \circ \xi(x_0) = -\frac{n-1}{4} \tan^2(r_0/2) \circ \xi(x_0)$$

und somit

$$\sum_i \nabla_{s_i}^y \nabla_{s_i}^y I(x,y) = (-\frac{n-1}{16} r^2 + o(r^4)) I(x,y)$$

4. Schritt: Aus  $\text{div}(s_i) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(s_j)$  ergibt sich nun

$$\text{div}(s_i) = \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ -(n-1) \tan(r_0/2) & i = 1 \end{cases}$$

$$\text{und somit } \sum_i \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^y \circ \xi = -(n-1) \tan(r_0/2) \nabla_{s_1}^y \circ \xi =$$

$$= -(n-1) \tan(r_0/2) \sum_{l < m} \frac{1}{2} \omega_{lm}(s_1)(s_l s_m) \circ \xi = 0$$

Wir erhalten daher die zweite Behauptung

$$\sum_i \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^y I(x,y) = 0$$

Bemerkung: Ist  $\Psi = gI$  ein Schnitt über  $U_\xi$ , wobei  $g$  nur vom Abstand  $r = r(x,y)$  abhängt, so gilt  $\sum_i \nabla_{s_i}^y I \circ s_i(\Psi) = 0$ .

Der Beweis ergibt sich aus folgender einfachen Rechnung

$$\sum_i \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I \circ s_i(\Psi) = \sum_i s_i(g) \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I \circ I = \nabla_{\text{grad}(g)}^{\mathcal{Y}} I$$

Der Gradient von  $g$   $\text{grad}(g) = g'(r)$  ist parallel zum Radialfeld und  $I$  wurde als parallel in dessen Richtung definiert. Daher gilt  $\nabla_{\text{grad}(g)}^{\mathcal{Y}} I = 0$ .

Satz 4: Im Fall der Sphäre  $S^n$  gilt für eine nur vom Abstand  $r$  abhängende Funktion  $g = g(r)$  die Formel

$$D^2(gI) = \left\{ \left( \frac{1}{4} n(n-1) + \frac{n-1}{16} r^2 + o(r^4) \right) g + \Delta(g) \right\} \cdot I.$$

Insbesondere haben die zur Bestimmung der Parametrix  $W$  eingeführten Schnitte  $U_j$  die Diagonalform  $U_j = g_j I$ , in welcher  $g_j = g_j(r)$  nur vom Abstand  $r$  abhängige Funktionen sind welche induktiv gemäß

$$g_0(r) = \theta^{-1/2}(r)$$

$$g_j(r) = - \theta^{-1/2}(r) \int_0^1 \theta^{1/2}(r\xi) \xi^{j-1} \left\{ \left( \frac{1}{4} n(n-1) + \frac{n-1}{16} r^2 \xi^2 + o(r^4) \right) g_{j-1}(r\xi) + \Delta(g_{j-1})(r\xi) \right\} d\xi$$

gegeben sind.

Beweis: Die erste Behauptung folgt mit Satz 3 und der obigen

Bemerkung aus

$$D^2(\Psi) = \frac{1}{4} R \Psi + \Delta(\Psi) - \sum_i \left( \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I + \text{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I \right) \circ \Psi - 2 \sum_i \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} I \circ s_i(\Psi)$$

während sich die Rekursionsformeln für  $g_j$  aus denjenigen für  $U_j$  und dem angegebenen Ausdruck für  $D^2(gI)$  ergibt.

Wir wenden uns nun der Berechnung der Koeffizienten  $d_1$  und  $d_2$  zu. Dazu verwenden wir folgende auf der Sphäre  $S^n$  geltenden Formeln (vergl. [6]):

$$\Theta(r) = \left( \frac{\sin r}{r} \right)^{n-1}$$

$$g_0(r) = \left( \frac{\sin r}{r} \right)^{-n-1/2} = 1 + \frac{n-1}{12} r^2 + \frac{(n-1)(5n-1)}{1440} r^4 + o(r^6)$$

$$\frac{\Theta'}{\Theta}(r) = -\frac{n-1}{3} + o(r^3)$$

sowie folgende Formel für den Laplace-Operator einer nur vom Abstand abhängenden Funktion  $g$

$$\Delta(g) = -g'' - g' \left( \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{n-1}{r} \right).$$

Setzen wir dies in die Rekursionsformel für  $g_1$  ein, so erhalten wir

$$g_1(r) = -\frac{1}{12} R + \frac{r^2}{2160} ( -15n^3 + 18n^2 - 12n + 9 ) + o(r^3)$$

und daher gilt

$$U_1(y,y) = g_1(0) = -\frac{1}{12} R \cdot I(y,y)$$

Wir hatten  $d_1$  bereits in der Form  $d_1 = k(n) \int_{X^n} R(x) dx$  dar-

gestellt. Setzen wir nun  $X^n = S^n$ , so erhalten wir  $k(n) = \frac{\dim(\mathcal{P})}{12}$

also

$$d_1 = -\frac{\dim(\mathcal{P})}{12} \int_{X^n} R(x) dx.$$

Weiterhin ergibt sich

$$g_2(0) = \frac{1}{4320} ( 15n^4 - 54n^3 + 21n^2 + 18n ) =$$

$$= \frac{1}{4320} ( 15n^2(n-1)^2 - 21 \cdot 2n(n-1) - 24n(n-1)^2 )$$

und somit

$$\text{Tr } U_2 = \dim(\mathcal{P}) g_2(0) = \frac{\dim(\mathcal{P})}{4320} ( 15n^2(n-1)^2 - 21 \cdot 2n(n-1) - 24n(n-1)^2 ).$$

Andererseits hatten wir  $\text{Tr } U_2$  in der Form

$$\text{Tr } U_2 = \alpha(n) a^2 + \beta(n) / R /^2 + \gamma(n) S^2 + \delta(n) \Delta R$$

dargestellt, woraus im Fall  $X = S^n$

$$a(n) n^2(n-1)^2 + b(n)2n(n-1) + c(n) n(n-1)^2 = 0$$

mit

$$a(n) = \frac{\alpha(n)}{\dim(\mathcal{V})} - \frac{15}{4320}, \quad b(n) = \frac{\beta(n)}{\dim(\mathcal{V})} + \frac{21}{4320}, \quad c(n) = \frac{\gamma(n)}{\dim(\mathcal{V})} + \frac{24}{4320}$$

folgt. Wir wollen nun  $a(n) = 0 = b(n) = c(n)$  für  $n \geq 3$  schließen.

Zu diesem Ziel benötigen wir eine weitere Serie von Testmannigfaltigkeiten, welche wir in der Form  $X = S^n \times S^m$  wählen. Weil die Metrik von  $S^n \times S^m$  das Produkt der Metriken von  $S^n$  und  $S^m$  ist, erhält man für diesen Raum unter Verwendung der auf  $S^n$  und  $S^m$  bereits berechneten Größen die Zusammenhangskoeffizienten  $\omega_{1j}^*(s_1)$  und den Schnitt  $\sum_1 \nabla_{s_1}^{\mathcal{V}} \nabla_{s_1}^{\mathcal{V}} I + \text{div}(s_1) \nabla_{s_1}^{\mathcal{V}} I$ , welcher

wiederum ein Vielfaches von  $I$  ist. Daraus bekommen wir - in Analogie zu der für  $X = S^n$  durchgeführten Rechnung - den Wert

$$S_2^{S^n \times S^m}(0):$$

$$S_2^{S^n \times S^m}(0) = \frac{1}{4320} [15(n(n-1) + m(m-1))^2 - 21(2n(n-1) + 2m(m-1)) - 24(n(n-1)^2 + m(m-1)^2)]$$

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen erhalten wir

$$0 = a(n+m)(n(n-1) + m(m-1))^2 + b(n+m)(2n(n-1) + 2m(m-1)) + c(n+m)(n(n-1)^2 + m(m-1)^2).$$

Setzen wir jetzt  $n = \lambda$  und  $m = k - \lambda$ , so entsteht ein Polynom

4. Grades in  $\lambda$  mit den Nullstellen  $\lambda = 0, 1, \dots, k$ . Daraus

schließt man für  $k \geq 4$  leicht  $a(k) = b(k) = c(k) = 0$ . Der Fall

dritter Dimension muß etwas anders behandelt werden, weil wir

drei Unbekannte  $a(3) = a$ ,  $b(3) = b$ ,  $c(3) = c$ , aber nur zwei

Testmannigfaltigkeiten  $S^3$ ,  $S^2 \times S^1$  und somit nur zwei Beziehungen

zwischen ihnen haben

$$3a + b + c = 0, \quad 2a + 2b + c = 0 \quad \langle 1 \rangle$$

Dafür besteht aber in einem 3-dimensionalen Riemannschen Raum die Beziehung  $R^2 - 4\epsilon^2 + 1/R^2 = 0$ . Aus ihr erhalten wir

$$d_2 = \int_{X^3} \alpha R^2 + \beta / R^2 + \gamma \epsilon^2 = \int_{X^3} (\beta - \alpha) / R^2 + (\gamma + 4\alpha) \epsilon^2$$

Aus der Definition der Größen  $a, b$  und  $c$  folgt unmittelbar

$$\beta - \alpha = 2 \cdot b - 2 \cdot a - \frac{72}{4320}, \quad \gamma + 4\alpha = 2 \cdot c + 8 \cdot a + \frac{72}{4320},$$

woraus man unter Verwendung von  $\langle 1 \rangle$   $\beta - \alpha = -\frac{72}{4320}$  und

$$\gamma + 4\alpha = \frac{72}{4320} \text{ schließt. Dann aber gilt}$$

$$d_2 = \int_{X^3} (\beta - \alpha) / R^2 + (\gamma + 4\alpha) \epsilon^2 = \frac{2}{4320} \int_{X^3} -36 / R^2 + 36 \epsilon^2$$

und eine nochmalige Anwendung von  $R^2 - 4\epsilon^2 + 1/R^2 = 0$  ergibt die Formel

$$d_2 = \frac{\dim(\mathcal{P})}{4320} \int_{X^3} 15 R^2 - 21 / R^2 - 24 \epsilon^2.$$

Das Ergebnis der bisherigen Überlegungen zusammenfassend formulieren wir

Theorem: Sei  $X^n$  ( $n \geq 3$ ) eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit und  $D$  der im Spinorbündel wirkende Dirac-Operator. Die Zeta-Funktion  $\zeta(t)$  des Operators  $D^2$  besitzt an der Stelle  $t = 0$  die asymptotische Entwicklung

$$\zeta(t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j$$

mit

$$d_0 = \dim(\mathcal{P}) \cdot \text{vol}(X)$$

$$d_1 = -\frac{\dim(\mathcal{P})}{12} \int_{X^n} R(x) dx$$

$$d_2 = \frac{\dim(\mathcal{P})}{4320} \int_{X^n} (15 R(x)^2 - 21 / R^2 - 24 \epsilon(x)^2) dx.$$



4.4. Einige Anwendungen der Asymptotenentwicklung.

In diesem Abschnitt der Arbeit wenden wir uns der Frage zu, welche Größen der Riemannschen Mannigfaltigkeit das Spektrum  $\text{Spec } \Delta$  des Laplace-Operators und das Spektrum  $\text{Spec } D^2$  des Operators  $D^2$  gemeinsam bestimmen. Aus der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion des Operators  $D^2$  folgt mit den oben bewiesenen Theorem, daß die Integrale

$$\int_{X^n} R(x) dx$$

$$\int_{X^n} (15 R(x)^2 - 21/R^2 - 24 \zeta(x)^2) dx ,$$

sowie das Volumen und die Dimension der Mannigfaltigkeit  $X^n$  durch  $\text{Spec } D^2$  determiniert werden. Andererseits bestimmt das Spektrum  $\text{Spec } \Delta$  des Laplace-Operators außer dem Volumen und der Dimension der Mannigfaltigkeit die Integrale

$$\int_{X^n} R(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{X^n} (5 R(x)^2 + 2/R^2 - 2 \zeta(x)^2) dx$$

(siehe [6]). Durch Kombination dieser Ausdrücke erhalten wir, daß für eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit die Größen

$$\int_{X^n} 3 R^2 - 2 \zeta^2 , \quad \int_{X^n} 3/R^2 + 2 \zeta^2 , \quad \int_{X^n} 1/R^2 + R^2 \quad (1)$$

durch die beiden Spektren zusammen determiniert werden.

Satz 5: Seien  $X^4$  eine 4-dimensionale, geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit konstanter Skalarkrümmung  $R$  und  $\bar{X}$  eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit konstanter Skalarkrümmung  $\bar{R}$  mit

$$\text{Spec } D^2(X^4) = \text{Spec } D^2(\bar{X}) \quad \text{und} \quad \text{Spec } \Delta(X^4) = \text{Spec } \Delta(\bar{X}).$$

Dann sind die Eulerschen Charakteristiken  $\chi(X^4)$  und  $\chi(\bar{X})$  der Mannigfaltigkeiten  $X^4$  und  $\bar{X}$  gleich.

Bemerkung: Bereits aus  $\text{Spec } \Delta(X^4) = \text{Spec } \Delta(\bar{X})$  oder

$\text{Spec}^{D^2}(X^4) = \text{Spec}^{D^2}(\bar{X})$  folgt  $R = \bar{R}$ ,  $\dim(\bar{X}) = \dim(X^4) = 4$  und  $\text{vol}(X^4) = \text{vol}(\bar{X})$ .

Beweis: Aus dem Satz von Gauß - Bonnet für 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten (vergl. [6]) erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi(X^4) &= \frac{1}{32 \pi^2} \int_{X^4} (R^2 + 1/R^2 - 4 \epsilon^2) = \\ &= \frac{1}{32 \pi^2} \left\{ \int_{X^4} (R^2 + 1/R^2) + 2 \int_{X^4} (3R^2 - 2 \epsilon^2) - 6 \int_{X^4} R^2 \right\} \end{aligned}$$

Die beiden ersten Integrale sind nach <1> durch die beiden Spektren determiniert, während  $\int_X R^2 = \int_X \bar{R}^2$  aus  $R = \bar{R} = \text{const.}$  und  $\text{vol}(X^4) = \text{vol}(\bar{X})$  folgt.

Ist  $X^4$  eine reell-4-dimensionale komplexe Kähler-Mannigfaltigkeit, so gilt für deren Signatur  $\text{sign}(X^4)$  und deren arithmetisches Geschlecht  $a(X^4)$  (vergl. [9])

$$\text{sign}(X^4) = - \frac{1}{48 \pi^2} \int_{X^4} 1/R^2 - 2 \epsilon^2$$

$$a(X^4) = \frac{1}{384 \pi^2} \int_{X^4} 1/R^2 - 8 \epsilon^2 + 3R^2$$

Satz 6: Seien  $X^4, \bar{X}^4$  reell-4-dimensionale, geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeiten mit Spin-Struktur und konstanter Skalar-krümmung. Aus  $\text{Spec}(X) = \text{Spec} \Delta(\bar{X})$  und  $\text{Spec}^{D^2}(X) = \text{Spec}^{D^2}(\bar{X})$  folgt die Gleichheit der Signaturen  $\text{sign}(X) = \text{sign}(\bar{X})$  und der arithmetischen Geschlechte  $a(X) = a(\bar{X})$ .

Beweis: Aus dem oben angegebenen Ausdruck für  $a(X)$  erhalten wir

$$s(X) = \frac{1}{384 \pi^2} \left\{ \int_{X^4} /R/2 + R^2 + 4 \int_{X^4} 3R^2 - 2 S^2 - 10 \int_{X^4} R^2 \right\}$$

und schließen wie im Beweis von Satz 5. Der Beweis für die Signatur verläuft analog.

Wir wenden uns nun Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung zu und beweisen

Satz 7: Es seien  $X^n$  und  $\bar{X}^n$  geschlossene Spin-Mannigfaltigkeiten, für welche die Spektren der Laplace-Operatoren und Dirac-Operatoren gleich sind. Hat  $X^n$  eine konstante Schnittkrümmung  $\sigma$ , so ist die Schnittkrümmung  $\bar{\sigma}$  von  $\bar{X}^n$  ebenfalls konstant und gleich  $\sigma$ .

Beweis: Da  $X^n$  ein Riemannscher Raum mit konstanter Schnittkrümmung ist, gilt  $/R/2 = \frac{2}{n-1} S^2$  und  $S^2 = R^2/n$ , während wir für  $\bar{X}^n$  die Ungleichungen  $/\bar{R}/2 \geq \frac{2}{n-1} \bar{S}^2$  und  $\bar{S}^2 \geq \bar{R}^2/n$  haben. Wegen  $R = n(n-1)\sigma$  folgt, daß  $R$  konstant ist. Aus der Gleichheit der Spektren erhalten wir

$$\int_{\bar{X}} / \bar{R} / 2 + \bar{R}^2 = \int_X / R / 2 + R^2 \quad \text{und} \quad \int_{\bar{X}} \bar{R} = \int_X R,$$

woraus wir mittels

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{n(n-1)} + 1 \right) \int_{\bar{X}} \bar{R}^2 &\leq \int_{\bar{X}} / \bar{R} / 2 + \bar{R}^2 = \int_X / R / 2 + R^2 = \\ &= \left( \frac{2}{n(n-1)} + 1 \right) \int_X R^2 \end{aligned}$$

die Ungleichungen

$$\int_{\bar{X}} \bar{R}^2 \leq \int_X R^2$$

$$\text{vol}(\bar{X}) \int_{\bar{X}} \bar{R}^2 \leq \text{vol}(X) \int_X R^2 = \left( \int_X R \right)^2 = \left( \int_{\bar{X}} \bar{R} \right)^2$$

bekommen. Eine Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$\left( \int_{\bar{X}} \bar{R} \right)^2 \leq \int_{\bar{X}} \bar{R}^2 \cdot \int_{\bar{X}} 1^2 = \int_{\bar{X}} \bar{R}^2 \cdot \text{vol}(\bar{X}) \leq \left( \int_{\bar{X}} \bar{R} \right)^2.$$

Daher tritt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung Gleichheit ein, also ist  $\bar{R}$  konstant und wegen  $\int_{\bar{X}} \bar{R} = \int_{\bar{X}} R$  gleich  $R$ . Da die

in <1> angeführten Integrale durch beide Spektren determiniert werden, erhalten wir aus  $R = \bar{R}$

$$\int_{\bar{X}} \xi^2 = \int_{\bar{X}} \bar{\xi}^2 \quad \text{und} \quad \int_{\bar{X}} 1/R^2 = \int_{\bar{X}} 1/\bar{R}^2.$$

Dann aber gilt

$$\frac{2}{n-1} \int_{\bar{X}} \xi^2 = \frac{2}{n-1} \int_{\bar{X}} \bar{\xi}^2 \leq \int_{\bar{X}} 1/\bar{R}^2 = \int_{\bar{X}} 1/R^2 = \frac{2}{n-1} \int_{\bar{X}} \xi^2$$

und somit  $\frac{2}{n-1} \bar{\xi}^2 = 1/\bar{R}^2$ . Diese Bedingung ist jedoch notwendig und hinreichend dafür, daß  $\bar{X}$  eine konstante Schnittkrümmung  $\bar{G}$  hat. Die Gleichheit  $G = \bar{G}$  folgt aus  $R = \bar{R}$  unmittelbar.

Folgerung 4: Seien  $X^n$  eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung und  $\bar{X}^n$  eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit. Sind die Spektren der Operatoren  $\Delta$  und  $D^2$  auf  $X^n$  und  $\bar{X}^n$  gleich, so sind  $X^n$  und  $\bar{X}^n$  lokal isometrisch. Bekanntlicherweise sind die Sphären  $S^2, S^3, S^4$  und die reellprojektiven Räume  $P^2, P^3, P^4$  durch das Spektrum des Laplace-Operators als Riemannsche Mannigfaltigkeit bestimmt (vergl. [6]).

Wir zeigen nun

Folgerung 5: Ist  $X^n$  eine geschlossene, zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit mit  $\text{Spec } \Delta(X^n) = \text{Spec } \Delta(S^n)$  und  $\text{Spec } D^2(X^n) = \text{Spec } D^2(S^n)$ , so ist  $X^n$  isometrisch zu  $S^n$ .

Beweis: Aus den Voraussetzungen ergibt sich, daß  $X^n$  konstante positive Schnittkrümmung  $G > 0$  hat. Ein solcher Raum wird dann von der Sphäre  $S^n$  überlagert:  $X^n = S^n / \Gamma$  (vergl. [34]).

Aus  $\text{vol}(X^n) = \text{vol}(S^n)$  und  $\text{vol}(X^n) = \frac{1}{\text{card}(\Gamma)} \text{vol}(S^n)$

erhalten wir dann, daß  $\Gamma$  nur aus der Identität besteht und somit  $S^n = X^n$  ist.

Mit dem gleichen Argument erhält man

Folgerung 6: Ist  $X^{4k+3}$  eine geschlossene, zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit und  $\text{Spec } \Delta(X^{4k+3}) = \text{Spec } \Delta(P^{4k+3})$ ,

$\text{Spec}^{D^2}(X^{4k+3}) = \text{Spec}^{D^2}(P^{4k+3})$ , so ist  $X^{4k+3}$  isometrisch zum reell-projektiven Raum  $P^{4k+3}$ .

4.5. Berechnung der Koeffizienten  $d_0, d_1, d_2$  nach einer Methode von P.E. Gilkey.

P.E. Gilkey (vergl. [15]) hat in Auswertung der Seeley-Formeln die Koeffizienten  $a_k(PP^*) = \int_X \mu_k$  in der Asymptotenentwicklung

der Zeta-Funktion des Operators  $PP^*$  für den Fall angegeben, daß  $PP^*$  ein Operator 2. Ordnung mit dem Symbol  $G(x, \nu) = -\nu^2$  ist. Dann nämlich können die  $\mu_k$  in der Form

$$\mu_k(x) = \text{Trace } E_k(x)$$

dargestellt werden, wobei  $E_k$  ein Schnitt im Bündel  $\text{Hom}(E, E)$  ist. Die ersten Homomorphismen  $E_0, E_1, E_2$  sind durch die Formeln

$$E_0 = (4\pi)^{-n/2} \text{Id}_{|E}$$

$$E_1 = (4\pi)^{-n/2} \left( H + \frac{1}{6} R \cdot \text{Id}_{|E} \right)$$

$$E_2 = (4\pi)^{-n/2} \left\{ \left( \frac{1}{30} \Delta R + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{180} S^2 + \frac{1}{180} |R|^2 \right) \text{Id}_{|E} + \frac{1}{6} RH + \frac{1}{2} H^2 + \frac{1}{12} W_{ij} W_{ij} + \frac{1}{6} \Delta H \right\}$$

gegeben. Die Homomorphismen  $H, W_{ij}$  aus  $\text{Hom}(E, E)$  sind dabei folgendermaßen zu bestimmen: Dem Operator  $PP^*$  wird eine Kova-

riante Ableitung  $\nabla^E$  im Vektorbündel  $E$  so zugeordnet, daß

$$PP^* = -H - \sum_i \nabla_{s_i}^E \nabla_{s_i}^E - \sum_i \operatorname{div}(s_i) \nabla_{s_i}^E$$

ist.  $W_{ij}$  ergibt sich dann aus

$$W_{ij} = \nabla_{s_i}^E \nabla_{s_j}^E - \nabla_{s_j}^E \nabla_{s_i}^E - \nabla_{[s_i, s_j]}^E$$

Sei nun  $E = \mathcal{Y}$  das Spinorbündel und  $\nabla^{\mathcal{Y}}$  die kovariante Ableitung in diesem. Aus

$$D^2 = \frac{1}{4} R - \sum_i \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} - \sum_i \operatorname{div}(s_i) \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}}$$

ergibt sich dann, daß die kovariante Ableitung  $\nabla^{\mathcal{Y}}$  zur Auswertung dieser Gilkey-Formeln benutzt werden kann und  $H = -\frac{1}{4} R$  gilt.

Die Koeffizienten  $d_0$  und  $d_1$  in der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion des Operators  $D^2$  erhalten wir dann aus

$$d_0 = (4\pi)^{n/2} \int_X \mu_0 = \int_X \operatorname{Tr}(\operatorname{Id}) = \dim(\mathcal{Y}) \operatorname{vol}(X)$$

$$d_1 = (4\pi)^{n/2} \int_X \mu_1 = \int_X (H + \frac{1}{6} R) \cdot \operatorname{Tr}(\operatorname{Id}) =$$

$$= - \frac{\dim(\mathcal{Y})}{12} \int_X R(x) dx$$

Für die Berechnung des Koeffizienten  $d_2$  benötigen wir die Spuren der Homomorphismen  $W_{ij}W_{ij}$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \nabla_{s_j}^{\mathcal{Y}} - \nabla_{s_j}^{\mathcal{Y}} \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} - \nabla_{[s_i, s_j]}^{\mathcal{Y}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l < m} R_{ijklm} (s_l s_m) \end{aligned}$$

wobei wir  $(s_l s_m)$  mittels der Clifford-Multiplikation als einen Homomorphismus im Spinorbündel auffassen, woraus unter

Verwendung einer orthonormierten Basis  $e_i \in \mathbb{R}^n$  mit  $s_i = [0, e_i]$

$$\text{Trace}(W_{ij}W_{ij}) = \frac{1}{4} \sum_{l < m} \sum_{p < q} R_{ijkl} R_{ijpq} \text{Trace}(e_l e_m e_p e_q)$$

folgt. Die Wirkung der Produkte  $e_i e_m$  auf dem Spin-Modul  $\Delta$  wurde im Abschnitt 2.3. dieser Arbeit beschrieben. Aus der dort angegebenen Formel ergibt sich

$$\text{Trace}(e_i e_j) = 0 \quad i < j$$

$$\text{Trace}(e_i e_j e_l e_m) = 0 \quad i < j < l < m$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Trace}(W_{ij}W_{ij}) &= \frac{1}{4} \sum_{l < m} R_{ijkl} R_{ijlm} \text{Trace}(e_l e_m e_l e_m) = \\ &= - \frac{\dim(\mathcal{Y})}{4} \sum_{l < m} R_{ijlm}^2 = - \frac{\dim(\mathcal{Y})}{8} / \mathbb{R} /^2. \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel für  $E_2$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d_2 &= (4JL)^{n/2} \int_{\mathbb{X}^n} \mu_2 = \int_{\mathbb{X}^n} \text{Tr}(E_2) = \\ &= \frac{\dim(\mathcal{Y})}{4320} \int_{\mathbb{X}^n} (15 R^2 - 21 / \mathbb{R} /^2 - 24 \mathcal{E}^2) dx. \end{aligned}$$

## 5. Zur Existenz paralleler Spinorfelder.

### 5.1. Wodurch tritt der Ricci-Tensor in Spinorbündel auf?

Wir gehen von einer parakompakten, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit  $X^n$  ( $n \geq 3$ ) mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  aus. Den Ricci-Tensor des Riemannschen Raumes fassen wir als  $(1,1)$ -Tensor auf, welcher jedem Vektorfeld  $t$  ein Vektorfeld  $\text{Ric}(t)$  durch

$$\text{Ric}(t) = \sum_{i,j} R_{ij} \langle t, s_i \rangle s_j$$

mit  $R_{ij} = \sum_I R_{i111j}$  suordnet. Ist  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  ein Schnitt in Spinorbündel  $\mathcal{Y}$ , so können wir  $\psi$  zweimal absolut differenzieren und erhalten eine 2-Form  $D^\psi D^\psi \psi$  mit Werten in  $\mathcal{Y}$ . Durch

$$H^\psi(t) = \sum_{i=1}^n s_i \cdot D^\psi D^\psi \psi(t, s_i)$$

definieren wir eine 1-Form mit Werten in  $\mathcal{Y}$ .

Satz 1: 
$$H^\psi(t) = -\frac{1}{2} \text{Ric}(t) \cdot \psi$$

Beweis: Sei  $\hat{\Omega} = d\hat{Z} + \frac{1}{2} [\hat{Z}, \hat{Z}]$  die Krümmungsform des Zusammenhanges  $\hat{Z}$ . Betrachten wir die lokale Krümmungsform

$$\hat{\Omega}^{\hat{S}} = \hat{\Omega} \circ \hat{S}^*$$

, so erhalten wir

$$\hat{\Omega}^{\hat{S}} = \frac{1}{2} \sum_{i < j} d\omega_{ij} e_i^* \wedge e_j^* + \frac{i}{8} \sum_{k < l} \sum_{p < q} \omega_{kl} \wedge \omega_{pq} [e_k^* e_l^* \cdot e_p^* e_q^*]$$

Berechnen wir die Kommutatoren und benutzen wir die Strukturgleichungen

$$d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \sigma^k \wedge \sigma^l,$$

in denen  $\sigma^1, \dots, \sigma^n$  ein zu  $s_1, \dots, s_n$  duales Repet ist, so ergibt sich



$$\hat{\Omega}^S = \frac{1}{4} \sum_{i < j} \left( \sum_{k, l} R_{ijkl} \sigma^k \wedge \sigma^l \right) e_i e_j .$$

Aus  $D^{\mathcal{Y}} D^{\mathcal{Y}} \psi = \mathcal{X}_x(\hat{\Omega}) \psi = \mathcal{X}(\hat{\Omega}) \psi$  (vergl. [32]) folgt somit

$$D^{\mathcal{Y}} D^{\mathcal{Y}} \psi(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \sum_{i < j} \sum_{k, l} R_{ijkl} \sigma^k \wedge \sigma^l(t_1, t_2)(s_i s_j) \psi$$

und daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \psi(t) &= \sum_m s_m \cdot D^{\mathcal{Y}} D^{\mathcal{Y}} \psi(t, s_m) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_m \sum_{i < j} \sum_k R_{ijkm} \sigma^k(t)(s_m s_i s_j) \cdot \psi = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \sum_k R_{ijk i} \sigma^k(t) s_j \cdot \psi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sum_k R_{ijk j} \sigma^k(t) s_i \cdot \psi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i < j} \sum_{m \neq i, j} R_{ijkm} \sigma^k(t)(s_m s_i s_j) \cdot \psi = \\ &= -\frac{1}{2} Ric(t) \cdot \psi + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i < j} \sum_{m \neq i, j} R_{ijkm} \sigma^k(t) s_m s_i s_j \cdot \psi . \end{aligned}$$

Die zweite Summe verschwindet jedoch. Dies folgt aus der Bianchi-Identität des Krümmungstensors

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 .$$

### 5.2. Parallele Spinorfelder

Ein Schnitt  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  heißt parallel, falls  $\nabla^{\mathcal{Y}} \psi = 0$ .

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, welche Konsequenzen sich für die Geometrie des Raumes aus der Existenz eines parallelen Spinorfeldes ergeben. Dazu beweisen wir

Satz 2: Sei  $X^n$  eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Bündel  $\mathcal{Y}$ . Sind  $\Psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  ein nirgends verschwindender Schnitt und  $w$  eine reelle 1-Form mit

$$\nabla_t^{\mathcal{Y}} \Psi = w(t) \Psi,$$

so verschwindet der Ricci-Tensor des Riemannschen Raumes identisch und  $w$  ist eine geschlossene Form,  $dw = 0$ .

Beweis: Nach Voraussetzung gilt  $D^{\mathcal{Y}} \Psi = w \Psi$  und daher  $D^{\mathcal{Y}} D^{\mathcal{Y}} \Psi = dw \Psi - w D^{\mathcal{Y}} \Psi = dw \Psi - w \wedge w \Psi = dw \Psi$ . Die 1-Form  $H^{\Psi}$  hat somit die Gestalt

$$H^{\Psi}(t) = \sum_m dw(t, s_m) s_m^* \Psi.$$

Aus Satz 1 folgt nun

$$\sum_m dw(t, s_m) s_m^* \Psi = -\frac{1}{2} \text{Ric}(t) \cdot \Psi$$

$$\sum_m \left\{ 2dw(t, s_m) + \sum_k R_{km} \langle t, s_k \rangle \right\} s_m^* \Psi = 0.$$

Weil  $\Psi$  ungleich Null und  $w$  eine reelle Form ist, erhalten wir daraus  $2dw(s_k, s_m) = -R_{km}$ . Die linke Seite dieser Gleichung ist antisymmetrisch in den Indizes  $k$  und  $m$ , während die rechte Seite in ihnen symmetrisch ist. Daraus folgt  $\text{Ric} = 0$  und  $dw = 0$ .

Folgerung 1: Sei  $X^n$  eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur. Ist  $\Psi$  ein nichtverschwindender, paralleler Schnitt im Spinorbündel  $\mathcal{Y}$ , so ist der Ricci-Tensor des Riemannschen Raumes gleich Null.

Folgerung 2: Sei  $X^n$  eine kompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur und einem nichtverschwindenden, parallelen Schnitt im assoziierten Spinorbündel. Ist entweder

a.) die erste Betti-Zahl von  $X^n$  größer als  $n-4$ :

$$b_1(X^n) > n - 4$$

oder sind

b.) die  $k$ -ten Homotopiegruppen ( $k > 1$ ) von  $X^n$  trivial:

$$\pi_k(X^n) = 0 \quad (k > 1)$$

so ist  $X^n$  eine flache Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Der Beweis der Folgerung 2 ergibt sich aus der ersten Folgerung und Resultaten von A.E.Fischer sowie J.A.Wolf (vergl. [10]), welche besagen, daß unter den angegebenen topologischen Bedingungen eine Ricci-flache Mannigfaltigkeit flach ist.

Folgerung 3: Eine 3-dimensionale, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtverschwindendem, parallelen Spinorfeld ist flach.

Tatsächlich, ist  $/\text{Ric}/$  die Länge des Ricci-Tensors,  $R$  die Skalarkrümmung und  $/R/$  die Länge des Krümmungstensors, so besteht in einem 3-dimensionalen Riemannschen Raum die Beziehung  $R^2 - 4/\text{Ric}/^2 + /R/^2 = 0$  (vergl. [6]). Somit können wir aus  $\text{Ric} = 0$  das Verschwinden des Krümmungstensors schließen.

Folgerung 4: Sei  $X^4$  eine kompakte, 4-dimensionale, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit einem nichtverschwindenden, parallelen Spinorfeld. Ist die Eulersche Charakteristik  $\chi(X^4)$  gleich Null, so ist  $X^4$  flach.

Den Beweis von Folgerung 4 erhält man aus der Gauß-Bonnet-Formel

$$\chi(X^4) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{X^4} (R^2 - 4/\text{Ric}/^2 + /R/^2)$$

(vergl. [6]) unmittelbar.

Beispiel 1: Wir gehen von einer Metrik auf dem Torus  $\mathbb{T}^2$  aus, deren Gauß'sche Krümmung nicht identisch verschwindet, und betrachten das Produkt  $X^3 = \mathbb{T}^2 \times S^1$ . In  $X^3$  wählen wir die kanonische Spin-Struktur. Das orthonormale Reper  $s = (s_1, s_2, s_3)$

welches wir so bestimmen, daß  $s_3$  tangential zu  $S^1$  ist, hebt sich dann global zu einem Schnitt  $s: X^3 \rightarrow P$  der Spinstruktur. Ist somit  $u(1), u(-1) \in \Delta_3$  eine Basis von  $\Delta_3$ , so erhalten wir durch  $\eta(1) = [\hat{s}, u(1)]$ ,  $\eta(-1) = [\hat{s}, u(-1)]$  globale Schnitte im Spinorbündel  $\mathcal{Y}$ . Nun kann diese Basis so gewählt werden, daß  $(e_1 e_2) \cdot u(1) = in(1)$  gilt (vergl. Abschnitt 2.3.). Dann folgt

$$\nabla_t^{\mathcal{Y}} \eta(1) = \frac{1}{2} \sum_{1 < m} \omega_{1m}(t) s_1 s_m \cdot \eta(1) = \frac{1}{2} \omega_{12}(t) I \eta(1).$$

Demnach ist im Bündel  $\mathcal{Y}$  die Gleichung  $\nabla^{\mathcal{Y}} \psi = \frac{1}{2} \omega_{12} \psi$  mit  $\psi \neq 0$  lösbar, obwohl der Ricci-Tensor von  $X^3$  ungleich Null und  $\omega_{12}$  im allgemeinen keine geschlossene Form ist. Dieses Beispiel zeigt, daß im Satz 2 die Voraussetzung "w ist eine reelle 1-Form" wesentlich ist.

Beispiel 2: Wir geben nun ein Beispiel dafür an, daß das Verschwinden des Ricci-Tensors selbst lokal noch nicht hinreichend für die Existenz paralleler Spinorfelder ist. Sei  $X^4$  die durch  $x_1 > 0$ ,  $0 < x_2 < \pi$  bestimmte offene Untermenge des  $\mathbb{R}^4$  und  $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4$  das kanonische Reper von Vektorfeldern. Wir betrachten die Schwarzschild-Metrik g

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1 + c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 \sin^2 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_1 + c}{x_1} \end{pmatrix}$$

welche durch diese Vorzeichenwahl allerdings eine Riemannsche Metrik ist. Leicht überzeugt man sich davon, daß der Ricci-Tensor identisch gleich Null ist. Durch

$$e_1 = \sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}} \partial_1, \quad e_2 = \frac{1}{x_1} \partial_2, \quad e_3 = \frac{1}{x_1 \sin x_2} \partial_3$$

und  $e_4 = \sqrt{\frac{x_1}{x_1 + c}} \partial_4$  erhalten wir ein orthonormales Repet von Vektorfeldern. Ist  $\sigma^1, \dots, \sigma^4$  dual dazu, so gilt

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}} \frac{1}{x_1} \sigma^2, \quad \omega_{13} = \sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}} \frac{1}{x_1} \sigma^3$$

$$\omega_{14} = -\frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{(x_1 + c)x_1}} \frac{1}{x_1} \sigma^4, \quad \omega_{23} = \frac{\cos x_2}{x_1 \sin x_2} \sigma^3,$$

$$\omega_{24} = 0 = \omega_{34}.$$

Gemäß  $\Delta_4 = \Delta_4^+ + \Delta_4^-$  zerfällt das Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  in

$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ + \mathcal{Y}^-$ . Wir zeigen, daß es in  $\mathcal{Y}^+$  keine nichttrivialen parallelen Spinorfelder gibt. Auf die gleiche Weise kann die Nichtexistenz derartiger Spinorfelder in  $\mathcal{Y}^-$  eingesehen werden.

Im Abschnitt 2.3. wurden lokale Basissechnitte  $\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,

$\varepsilon_i = \pm 1$ , von  $\mathcal{Y}$  derart konstruiert, daß  $\eta(1,1)$  und

$\eta(-1,-1)$  das Bündel  $\mathcal{Y}^+$  aufspannen. Schreibt man für

$\psi = f \eta(1,1) + h \eta(-1,-1)$  die Gleichung  $\nabla^{\mathcal{Y}} \psi = 0$  aus,

so erhält man

$$2df + if \omega_{12} + h(-\omega_{13} - i(\omega_{14} + \omega_{23})) = 0$$

$$2dh + f(\omega_{13} - i(\omega_{14} + \omega_{23})) - ih \omega_{12} = 0.$$

Aus der angegebenen Gestalt der  $\omega_{ij}$  schließt man nun zuerst, daß  $f$  und  $h$  nicht von  $x_1$  abhängen und danach setzt man in dieses Gleichungssystem  $e_2$  ein. Dann ergibt sich

$$2 \partial_2(f) = -if \sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}}, \quad 2 \partial_2(h) = ih \sqrt{\frac{x_1 + c}{x_1}}$$

woraus für  $c \neq 0$   $f = 0 = h$  folgt.

Wir wenden uns jetzt 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu.  
Das Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  über einem derartigen Raum zerfällt kanonisch  
in  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ + \mathcal{Y}^-$ .

Satz 3: Sei  $X^4$  eine 4-dimensionale, Riemannsche Spin-Mannig-  
faltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten  
Spinorbündel  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^+ + \mathcal{Y}^-$ . Existieren zwei nichtverschwin-  
dende, parallele Schnitt  $\psi^+ \in \Gamma(\mathcal{Y}^+)$ ,  $\psi^- \in \Gamma(\mathcal{Y}^-)$   
in  $\mathcal{Y}^+$  beziehungsweise  $\mathcal{Y}^-$ , so ist  $X^4$  flach.

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, zeigen wir folgendes

Lemma 1:  $X^n$  sei eine Mannigfaltigkeit und  $\alpha, \beta, \gamma$  reelle  
1-Formen auf ihr. Existieren komplexwertige Funktionen

$f, g : X^n \rightarrow \mathbb{C}$  derart, daß

1.  $|f| + |g| > 0$
2.  $2df + if\alpha + g(\beta - i\gamma) = 0$   
 $2dg + f(-\beta - i\gamma) - ig\alpha = 0$

so gelten folgende Beziehungen zwischen den Formen

$$d\alpha = \beta \wedge \gamma, \quad d\beta = \gamma \wedge \alpha, \quad d\gamma = \alpha \wedge \beta.$$

Beweis: Wir differenzieren beide Gleichungen und erhalten

$$idf \wedge \alpha + ifd\alpha + dg \wedge (\beta - i\gamma) + g(d\beta - id\gamma) = 0$$

$$df \wedge (-\beta - i\gamma) + f(-d\beta - id\gamma) - idg \wedge \alpha - igd\alpha = 0.$$

Multiplizieren wir diese mit 2 und setzen wir  $df$  beziehungsweise  
 $dg$  aus den Ausgangsgleichungen ein, so ergibt sich nach Zusammen-

$$\text{fassen} \quad ifA + g(B + iC) = 0$$

$$f(-B + iC) - igA = 0$$

mit  $A = 2(d\alpha + \gamma \wedge \beta)$ ,  $B = 2(d\beta + \alpha \wedge \gamma)$  und

$C = 2(-d\gamma + \alpha \wedge \beta)$ . Aus  $|f| + |g| > 0$  folgt nun

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 \quad \text{und weil } \alpha, \beta, \gamma \text{ reelle Formen sind}$$

erhalten wir  $A = B = C = 0$ . Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Beweis von Satz 3: Die Aussage des Satzes besteht in einer lokalen  
Behauptung. Somit können wir uns für den Beweis auf eine offene

einfach-zusammenhängende Menge  $U \subset X^4$  beschränken, über der ein orthonormales Repor von Vektorfeldern  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$  existiert. Den Schnitt  $s : U \rightarrow Q$  heben wir in das Bündel  $P$  zu einem Schnitt  $\hat{s}$ . Im Abschnitt 2.3. wurde eine Basis  $u(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$ , von  $\Delta_4$  angegeben und wir betrachten die dazugehörigen Basisschnitte  $\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [\hat{s}, u(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$  in  $\mathcal{P}$ . Den Schnitt  $\Psi^+$  stellen wir in der Form

$$\Psi^+ = f \eta(1,1) + g \eta(-1,-1)$$

mit komplexwertigen Funktionen  $f$  und  $g$  dar. Aus  $\nabla^{\mathcal{P}} \Psi^+ = 0$  folgt

$$0 = df \eta(1,1) + dg \eta(-1,-1) + \frac{1}{2} f \sum_{i < j} \omega_{ij} s_i s_j \cdot \eta(1,1) + \frac{1}{2} g \sum_{i < j} \omega_{ij} s_i s_j \cdot \eta(-1,-1).$$

Die Produkte  $s_i s_j \cdot \eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  wurden in 2.3. gleichfalls vollständig berechnet. Wenden wir diese Formeln an, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$2df + if(\omega_{12} + \omega_{34}) + g((\omega_{24} - \omega_{13}) - i(\omega_{14} + \omega_{23})) = 0$$

$$2dg + f(-(\omega_{24} - \omega_{13}) - i(\omega_{14} + \omega_{23})) - ig(\omega_{12} + \omega_{34}) = 0.$$

Wegen  $|f| + |g| > 0$  folgt dann aus Lemma 1

$$d\omega_{12} + d\omega_{34} = (\omega_{24} - \omega_{13}) \wedge (\omega_{14} + \omega_{23})$$

$$d\omega_{24} - d\omega_{13} = (\omega_{14} + \omega_{23}) \wedge (\omega_{12} + \omega_{34})$$

$$d\omega_{14} + d\omega_{23} = (\omega_{12} + \omega_{34}) \wedge (\omega_{24} + \omega_{13}).$$

Wertet man analog  $\nabla^{\mathcal{P}} \Psi^- = 0$  aus, so ergibt sich

$$d\omega_{34} - d\omega_{12} = (\omega_{13} + \omega_{24}) \wedge (\omega_{23} - \omega_{14})$$

$$d\omega_{13} + d\omega_{24} = (\omega_{23} - \omega_{14}) \wedge (\omega_{34} - \omega_{12})$$

$$d\omega_{23} - d\omega_{14} = (\omega_{34} - \omega_{12}) \wedge (\omega_{13} + \omega_{24}).$$

Unter Verwendung der Strukturgleichungen des Riemannschen Raumes schließt man aus diesen 6 Gleichungen unschwer  $R_{ijkl} = 0$ . Somit ist  $X^4$  flach.

Folgerung 5: Der Raum der parallelen Schnitte des Spinorbündels über einer nichtflechten, 4-dimensionalen, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit hat maximal die Dimension 2.

Folgerung 6: Hat eine 4-dimensionale, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit einen nichtverschwindenden, parallelen Schnitt im Spinorbündel und ein derartiges, paralleles Vektorfeld, so ist sie flach.

Beweis: Wir zerlegen den parallelen Schnitt  $\Psi = \Psi^+ + \Psi^-$  gemäß der Aufspaltung  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ + \mathcal{S}^-$  und können  $\Psi^+ \neq 0$  voraussetzen. Dann ist  $\Psi^+$  gleichfalls parallel. Ist  $V$  das nichtverschwindende, parallele Vektorfeld, so ist  $V \cdot \Psi^+$  ein paralleler Schnitt in  $\mathcal{S}^-$ . Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.

### 5.3. Parallele Spinoren und der Kern des Dirac-Operators.

Wir betrachten ein Vektorbündel  $E$  über einer Mannigfaltigkeit  $X^n$  mit kovarianter Ableitung  $\nabla^E$ . Im Bündel  $\text{Hom}(E, E)$  wird dann durch

$$\left( \bar{\nabla}^E A \right) (e) = \nabla^E_t (Ae) - A \left( \nabla^E_t e \right)$$

mit  $A \in \Gamma(\text{Hom}(E, E))$  und  $e \in \Gamma(E)$  eine kovariante Ableitung  $\bar{\nabla}^E$  definiert. Diese allgemeine Konstruktion wenden wir auf das Spinorbündel  $\mathcal{S}$  einer Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit und die kovariante Ableitung  $\nabla^{\mathcal{S}}$  an. Wir erhalten eine kovariante Ableitung  $\bar{\nabla}^{\mathcal{S}}$  in  $\text{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ .

Einen Vektor  $t \in T(X^n)$  kann man durch

$$t(\Psi) = t \cdot \Psi$$

als einen Homomorphismus des Spinorbündels  $\mathcal{S}$  auffassen, wodurch eine Einbettung  $T(X^n) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$  des Tangentialbündels in  $\text{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$  entsteht. Wir können somit ein Vektorfeld  $t$  einerseits mittels der kovarianten Ableitung  $\nabla$  im Tangential-



bündel und andererseits mittels  $\bar{\nabla}^{\mathcal{F}}$  ableiten. Das Ergebnis ist beide Male das gleiche:

Lemma 2: Für ein Vektorfeld  $t \in \Gamma(T(X^n))$  gilt

$$\nabla t = \bar{\nabla}^{\mathcal{F}} t.$$

Beweis: Wir prüfen dies lokal nach. Sei  $s_1, \dots, s_n$  ein orthogonales Reper in  $U \subset X^n$ . Dann ist mit  $t = t^i s_i$  und  $v \in \mathcal{F}(X^n)$

$$\nabla_v t = \sum_i v(t^i) s_i + \sum_{i,m} t^i \omega_{im}(v) s_m$$

und demnach

$$(\nabla_v t) \cdot \psi = \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_{i,m} t^i \omega_{im}(v) s_m \cdot \psi.$$

Andererseits erhalten wir

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_v^{\mathcal{F}} t) \cdot \psi &= \nabla_v^{\mathcal{F}} (t \cdot \psi) - t \cdot (\nabla_v^{\mathcal{F}} \psi) = \\ &= \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_i t^i \nabla_v^{\mathcal{F}} (s_i \cdot \psi) - \\ &\quad - t \cdot (\nabla_v^{\mathcal{F}} \psi). \end{aligned}$$

Ist nun in einem lokalen Reper  $\eta(\varepsilon)$  von  $\mathcal{F}$  der Schnitt  $\psi$  in der Form  $\psi = \sum_{\varepsilon} \psi^{\varepsilon} \eta(\varepsilon)$  dargestellt, so folgt

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_v^{\mathcal{F}} t) \cdot \psi &= \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_i \sum_{\varepsilon} t^i v(\psi^{\varepsilon}) s_i \eta(\varepsilon) + \\ &\quad + \sum_i \sum_{\varepsilon} t^i \psi^{\varepsilon} \nabla_v^{\mathcal{F}} (s_i \cdot \eta(\varepsilon)) - \sum_{\varepsilon} v(\psi^{\varepsilon}) t \cdot \eta(\varepsilon) \\ &\quad - \sum_{\varepsilon} \psi^{\varepsilon} t \cdot (\nabla_v^{\mathcal{F}} \eta(\varepsilon)) = \\ &= \sum_i v(t^i) s_i \cdot \psi + \\ &\quad + \sum_{i_1, \varepsilon} t^{i_1} \psi^{\varepsilon} \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m} \omega_{im}(v) (s_{1m} s_i - s_1 s_{im}) \cdot \eta(\varepsilon) = \end{aligned}$$

$$= \sum_1 v(t^i) s_i \cdot \psi + \sum_{1 < m} w_{1m}(v) t^1 s_m \cdot \psi$$

Wir erhalten also  $(\overline{\nabla}_v^\psi t) = (\nabla_v t)$  und lemma 2 ist bewiesen.

Wir definieren jetzt eine Cliffordmultiplikation eines Vektors  $t \in T(X^n)$  mit einem Homomorphismus  $A \in \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$  dadurch, daß wir  $t$  als einen Homomorphismus von  $\mathcal{Y}$  auffassen und ihn mit  $A$  verknüpfen:

$$\begin{aligned} \mu: T(X^n) \otimes \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \\ \mu(t \otimes A) &= t \cdot A \end{aligned}$$

Anstelle  $\mu(t \otimes A)$  schreiben wir einfach  $t \cdot A$ .

Einen elliptischen Differentialoperator erster Ordnung

$$P: \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) \longrightarrow \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}))$$

erhalten wir nun als Superposition folgender Abbildungen:

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) &\xrightarrow{\overline{\nabla}^\psi} \Gamma(T^*(X^n) \otimes \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) = \\ &= \Gamma(T(X^n) \otimes \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) \xrightarrow{\mu} \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) \end{aligned}$$

Der Operator ist analog zum Dirac-Operator definiert. In einem orthonormalen Reper  $s_1, \dots, s_n$  gilt

$$P(A) = \sum_1 s_i \cdot \overline{\nabla}_{s_i}^\psi A$$

Lemma 3: Seien  $t \in \Gamma(T(X^n))$  ein Vektorfeld und  $w^t \in \Gamma(T^*(X^n))$  die ihm entsprechende 1-Form. Dann ist  $P(t)$  genau dann gleich Null, falls  $dw^t = 0 = \delta w^t$ .

Beweis: Unter Verwendung von Lemma 2 erhalten wir

$$P(t) = \sum_1 s_i \cdot \overline{\nabla}_{s_i}^\psi(t) = \sum_1 s_i \cdot \nabla_{s_i}(t)$$

Mit  $t = t^j s_j$  und  $w^t = t^j \epsilon^j$  gilt dann

- 90 -

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i,j} s_i \cdot (s_i(t^j) s_j + t^j \sum_m \omega_{jm}(s_i) s_m) = \\
 &= - \sum_i s_i(t^i) - \sum_{j,m} t^j \omega_{jm}(s_m) + \sum_{i < j} (s_i(t^j) - s_j(t^i)) + \\
 &\quad + \sum_m (t^m \omega_{mj}(s_i) - t^m \omega_{mi}(s_j)) s_i s_j = \\
 &= - \sum_i s_i(t^i) - \sum_{j,m} t^j \omega_{jm}(s_m) + \sum_{i < j} d\omega^t(s_i, s_j) s_i s_j = \\
 &= \delta \omega^t + \sum_{i < j} d\omega^t(s_i, s_j) s_i s_j .
 \end{aligned}$$

Daraus ersieht man, daß  $P(t) = 0$  gleichwertig mit  $\delta \omega^t = 0 = d\omega^t$  ist (verwende im Fall  $n =$  ungerade Zahl das Lemma 1 im Abschnitt 2.4. an!).

Ist  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  ein Schnitt, so definieren wir einen Homomorphismus  $E\psi: \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}$  durch  $E\psi(A) = A(\psi)$ . Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) & \xrightarrow{P} & \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})) \\
 \downarrow E\psi & & E\psi \downarrow \\
 \Gamma(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(\mathcal{Y})
 \end{array}$$

und beweisen

**Lemma 4:** Ist  $\psi$  ein paralleler Schnitt, so ist dieses Diagramm kommutativ.

**Beweis:** Aus  $\nabla^{\mathcal{Y}} \psi = 0$  folgt

$$\begin{aligned}
 E\psi(P(A)) &= (PA)(\psi) = \sum_i s_i \cdot \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} A(\psi) = \\
 &= \sum_i s_i \cdot (\nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} (A\psi) - A(\nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} \psi)) = \\
 &= \sum_i s_i \cdot \nabla_{s_i}^{\mathcal{Y}} (A\psi) = D(E\psi(A)) .
 \end{aligned}$$

Satz 4: Sei  $X^n$  eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit ausgewählter Spin-Struktur sowie dem assoziierten Spinorbündel  $\mathcal{Y}$ .

Seien  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  ein paralleler Schnitt und  $t \in \Gamma(T(X^n))$  ein Vektorfeld, dessen entsprechende 1-Form  $w^t$  harmonisch ist:  $dw^t = 0 = \delta w^t$ . Dann liegt  $t \cdot \psi$  im Kern des Dirac-Operators.

Der Beweis von Satz 4 ergibt sich aus den obigen Hilfssätzen unmittelbar:  $D(t \cdot \psi) = DE \psi(t) = E \psi P(t) = 0$ .

Folgerung 7: Sei  $X^n$  eine kompakte, Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit nichttriviellem, parallelen Schnitt  $\psi \in \Gamma(\mathcal{Y})$  im Spinorbündel  $\mathcal{Y}$  und sei  $b_1(X^n)$  deren erste Betti-Zahl. Dann ist die Dimension  $\dim(\text{Ker } D)$  des Kerns des Dirac-Operators nicht kleiner als  $\frac{1}{2} b_1(X^n)$ :

$$\dim(\text{Ker } D) \geq \frac{1}{2} b_1(X^n)$$

Beweis: Wir wählen reelle Vektorfelder  $t_1, \dots, t_b$  ( $b=b_1(X^n)$ ) so, daß die entsprechenden 1-Formen harmonisch und linear unabhängig im Kern des Laplace-Operators sind. Dann sind die Vektorfelder in dem Sinne linear unabhängig, daß mit

$$\int_{X^n} \sum_{i=1}^b a_i t_i / 2 = 0$$

auch alle Koeffizienten  $a_i$  verschwinden ( $a_i$  - reell). Nach Satz 4 liegen die Spinoren  $t_1 \cdot \psi, \dots, t_b \cdot \psi$  im Kern des Dirac-Operators. Wir zeigen, daß sie als solche reell linear unabhängig sind. Mit  $t = \sum a_i t_i$  ( $a_i$  - reell) folgt aus

die Beziehung 
$$\int_{X^n} (t \cdot \psi, t \cdot \psi) = 0$$
  
$$= \int_{X^n} (t \cdot t \cdot \psi, \psi) = 0$$

Nun ist aber  $t \cdot t = -|t|^2$  und wir erhalten  $\int_{X^n} |t|^2 (\psi, \psi) = 0$ .

Weil  $\psi$  parallel ist, hat er eine konstante Länge  $(\psi, \psi) > 0$ .

Somit schließen wir  $\int_X \sum a_i t_i / 2 = 0$  und  $a_i = 0$ .

Die betrachteten Spinoren sind demnach reell linear unabhängig in  $\text{Ker}(D)$ . Dies liefert die behauptete Ungleichung.

Beispiel 3: Sei  $X^n = T^n$  der flache Torus. Mit der kanonischen Spin-Struktur hat  $X^n$  genau  $2 \lfloor n/2 \rfloor$  parallele Spinoren. Liegt jedoch eine andere Spin-Struktur vor, so gilt  $\dim(\text{Ker } D) = 0$  (vergl. Abschnitt 3.3.). Nach Folgerung 7 existieren dann keine globalen, parallelen Spinorfelder, da  $b_1(X^n) = n > 0$  ist. Die Existenz von global-definierten Spinoren hängt also außer von der Geometrie des Raumes noch von der gewählten Spin-Struktur ab. Abschließend bemerken wir noch, daß auf  $X^3$  mit der kanonischen Spin-Struktur  $\dim(\text{Ker } D) = 2$  und  $\frac{1}{2} b_1(X^3) = \frac{3}{2}$  gilt.

Literaturverzeichnis

- 1] M.F. Atiyah, R. Bott ,  
Fixed point formulars II , Annals of Mathematics  
88 (1968) , S. 451 - 491 .
- 2] M.F. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi,  
On the heat equation and the index theorem,  
Inventiones in Mathematics 19 (1973), S. 279 - 330 .
- 3] M.F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro,  
Clifford modules, Topology 3 (1964), S. 3 - 38.
- 4] M.F. Atiyah, I.M. Singer,  
The index of elliptic operators III, Annals of  
Mathematics 87 (1968), S. 546 - 604 .
- 5] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer,  
Spectral asymmetry and Riemannian geometry I ,  
Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), S. 43 - 69 .
- 6] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet,  
Le spectre d'une variete<sup>e</sup> riemannienne,  
Lecture Notes in Mathematics 194 (1971).
- 7] H. Dlubek, Th. Friedrich,  
Spektraleigenschaften des Dirac - Operators - die  
Fundamentallösung seiner Wärmeleitungsgleichung und  
die Asymptotenentwicklung der Zeta - Funktion,  
in Druck in Journal of Differential Geometry.
- 8] H. Dlubek, Th. Friedrich,  
Spectral properties of the Dirac - Operator, im Druck  
in Bulletin Academie Polonaise.
- 9] H. Donnelly,  
Topology and Einstein Kähler metrics,  
Journal of Differential Geometry 11 (1976), S. 259 - 264.

- [10] A.E. Fischer, J.A. Wolf,  
The structure of compact ricci - flat riemannian  
manifolds, *Journal of Differential Geometry* 10 (1975),  
S. 277 - 288.
- [11] Th. Friedrich,  
Die Abhängigkeit des Dirac - Operators von der Spin-  
Struktur, im Druck in *Colloquium Mathematicum*.
- [12] Th. Friedrich,  
Zur Existenz paralleler Spinorfelder über Riemannschen  
Mannigfaltigkeiten, im Druck in *Colloquium Mathematicum*.
- [13] Th. Friedrich, S. Sulanke,  
Ein Kriterium für die formale Selbstadjungiertheit  
des Dirac - Operators, im Druck in *Colloquium  
Mathematicum*.
- [14] M.P. Gaffney,  
Asymptotic Distributions associated with the Laplacian  
for forms, *Comm. Pure and Appl. Mathematics* XI (1958) ,  
S. 535 - 545.
- [15] P.B. Gilkey,  
The spectral geometry of real and complex manifolds,  
*Proc. Symp. Pure Math.* 27, AMS (1975), S. 265 - 280.
- [16] P.B. Gilkey,  
The spectral geometry of symmetric spaces, *Transactions  
of the American Mathematical Society* 225 (1977),  
S. 341 - 353.
- [17] N. Hitchin,  
Harmonic Spinors, *Advances in Mathematics* 14 (1974),  
S. 1 - 55.
- [18] D. Husemoller, *Fibre bundles*, New York 1966.
- [19] R. Hotta, R. Parthasarathy,  
Multiplicity formalar for discrete series ,

Inventiones in Mathematics 26 (1974), S. 133 - 178.

- [20] A. Ikeda,  
Formally self - adjointness for the Dirac - operator  
on homogeneous spaces, Osaka Journal of Mathematics  
12 (1975), S. 173 - 185.
- [21] M. Kuranishi, I.M. Singer,  
Curvature and the eigenvalues of the Laplacian,  
Journal of Differential Geometry 1 (1967), S. 43 - 67.
- [22] A. Lichnerowicz,  
Spineurs harmoniques, C.R.Acad. Sci. Paris 257  
(1963), S. 7 - 9 .
- [23] K.H. Mayer,  
Elliptische Differentialoperatoren und Ganzzahlig-  
keitssätze für charakteristische Klassen, Topology  
4 (1965) , S. 295 - 313.
- [24] J. Milnor ,  
Spin - structures on manifolds, L'Enseignement  
Mathématique IX (1963) , S. 198 - 203 .
- [25] J. Milnor,  
Remarks concerning spin - manifolds, Differential and  
combinatorial topology (in honour of Marsten Morse),  
Princeton 1965 , S. 55 - 62 .
- [26] R. Palais,  
Seminar on the Atiyah-Singer-Index-Theorem,  
Princeton 1965.
- [27] R. Parthasarathy,  
Dirac operator and discrete series, Annals of  
Mathematics 96 (1972), S. 1 - 30.
- [28] T. Sakai,  
On eigenvalues of Laplacian and curvature of Riemannian  
manifolds, Tohoku math. Journal 23 (1971), S. 589 - 603.



[29] R.T. Seeley,

Complex powers of an elliptic operator, Proc. Symp.  
Pure Mathematics 10, AMS (1967), S. 288x- 307.

[30] E. Spanier,

Algebraic topology, New York 1966.

[31] S. Sulanke,

Der Dirac-Operator, Diplomarbeit Berlin 1977.

[32] R. Sulanke, F. Wintgen,

Differentialgeometrie und Faserbündel, Berlin 1972.

[33] H. Weyl,

The classical groups, Princeton 1946.

[34] J.A. Wolf,

Spaces of constant curvature, New York 1967.

[35] J.A. Wolf,

Essential self-adjointness for the Diracoperator  
and its square, Indiana University Mathematics  
Journal 22 (1973), S. 611 - 640.

[36] J.A. Wolf,

Partial spin structure and induced representations  
of Lie groups, Proc. Symp. Pure Math. 27, Teil II,  
AMS (1975), S. 379 - 381.