BERLINER NETZWERK

mathematisch-
naturwissenschaftlich
profilierter Schulen

---

Curriculum Mathematik Analysis

Grundsätzlich wird auf die Kompetenz K1 (mathematisch argumentieren) sehr viel Wert gelegt. Das Erlangen dieser Kompetenz benötigt viele Jahre des regelmäßigen Übens. Es wird nicht an allen Stellen explizit darauf hingewiesen, dass Zusammenhänge zwischen Strukturen zu erklären, Definitionen und Sätze exakt zu formulieren und Behauptungen zu beweisen sind. Ausnahmen sind explizit gekennzeichnet. Die Inhalte und formalen Schreibweisen der Mengenlehre und der Logik werden wann immer möglich benutzt. Es soll vorwiegend mit Brüchen und nur in sinnvollen Ausnahmen mit Dezimalbrüchen gearbeitet werden. Der Taschenrechnereinsatz soll nur sporadisch erfolgen.

Der Inhalt dieses Curriculums orientiert sich an der Modulbeschreibung der Analysis I der Humboldt-Universität zu Berlin und dem Rahmenlehrplan des Landes Berlin. Entsprechend enthält es viele über den regulären Schulstoff hinausgehende Inhalte, welche Voraussetzung für die Scheinvergabe sind. Grau geschriebene Inhalte sind fakultative Ergänzungen oder Vertiefungen.

Zeiteinteilung

Diese Zeiteinteilung ist ein Vorschlag, welche für den Leistungskurs L+ im ersten Semester und den Zusatzkurs Z im zweiten Semester gedacht ist. Außerdem wird in diesem Plan davon ausgegangen, dass die Inhalte in Klassenstufe 10 vollständig behandelt wurden. Sollte insbesondere der Zusatzkurs in einem anderen Semester liegen, muss die Verteilung angepasst werden. Es ist ein zeitlicher Puffer eingeplant, um Ergänzungsthemen zu behandeln.

Sollten nicht alle Inhalte der Klassenstufe 10 zu Beginn der Sekundarstufe II bekannt sein, so wird empfohlen, über zwei Semester die Zusatzkurse zum Aufholen/Festigen der Inhalte aus Klassenstufe 10 und zur Behandlung der Inhalte der Analysis zu nutzen.

| Thema (verbindlich) | Leistungskurs (L+) | Zusatzkurs (Z) |
|---|---|---|
| Mengenabbildungen | 6 | 5 |
| Folgen | 20 | 15 (falls nicht in Klasse 10) |
| Reihen | | 9 |
| Stetige Funktionen | 20 | 8 |
| Differenzialrechnung | 25 | 10 |
| Potenzreihen | | 8 |
| Summe | 71 von 75 | 40 von 45 (+15 falls nicht in Klasse 10) |

Empfohlene Ergänzungen im Z-Kurs:

- Fundamentalsatz der Algebra
- Numerische Integration + Fehlerabschätzung
- Metrische Räume
- Differentialgleichungen
- Integrierbarkeit (Ergänzung zu L+)

Es ist umgekehrt auch möglich, nach gründlicher Vorbereitung in der Sekundarstufe I die obigen verbindlichen Themen in weniger Stunden abzudecken. Die dadurch gewonnene Zeit kann dann für Ergänzungsthemen insbesondere zum zweiten Semester des Leistungskurses L+ genutzt werden. Diese Ergänzungsthemen sind nicht Voraussetzung für den Erwerb des Scheines in Analysis I.

Abbildungen zwischen Mengen (L+: 6 Stunden, Z: 5 Stunden)

| Inhalte | Anmerkungen | Einordnung |
|---|---|---|
| • Injektivität, Surjektivität, Bijektivität<br>• Definition der Umkehrabbildung<br>• Bild-, Urbildraum<br>(Gesetze über Bilder und Urbilder von Vereinigung, Schnitt, Differenz von Mengen)<br>• Verkettung von Abbildungen<br>- Assoziativität der Verkettung<br>- Inverse Abbildung<br>• Infimum, Supremum von beschränkten Mengen<br>• Eigenschaften von $\boldsymbol{R}$ wiederholen (insb. Vollständigkeit und archimedisches Prinzip)<br>• Betragsungleichungen | Idealerweise sind die Begriffe bereits in der Mittelstufe bei der Behandlung von Funktionen gefallen. | L+ |

Folgen (L+: 20 Std., Klasse 10 oder Z: 15 Std., falls Z-Kurs in Q1)

| Inhalte | Anmerkungen | Einordnung |
|---|---|---|
| • Definition von reellen und komplexen Folgen, Veranschaulichung auf der Zahlengeraden und in der Zahlenebene optional auch Veranschaulichung als Graph einer Abbildung von ***N*** nach ***R*** und | Als Vorbereitung ist es sinnvoll, den Betrag einer Zahl als Abstand dieser Zahl von 0 zu betrachten und entsprechend $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ als Abstand von $\boldsymbol{x}$ zu $\boldsymbol{y}$. | 10 bzw. Z |
| • Definition Grenzwert/Konvergenz<br>- Nachweis Eindeutigkeit des GW<br>- Uneigentliche Grenzwerte (±∞)<br>- Explizit definierte Folgen<br>- Rekursiv definierte Folgen<br>- Monotonie<br>- Beschränktheit | Zur graphischen Veranschaulichung der Folgenglieder sollte diese als Punkte auf der Zahlengeraden bzw. als Punkte in der Zahlenebene verwendet werden. Optional kann auch die Veranschaulichung als Graph einer Abbildung von ***N*** nach ***R*** genutzt werden. Ersteres hilft beim Verständnis der Begriffe $\varepsilon$-*Umgebung*, *Teilfolge* und *Häufungspunkt.* Letzteres bietet sich zum Verständnis der Konvergenz (im Sinne von Nicht-mehr-Verlassen des $\varepsilon$-*Schlauchs*) an.<br><br>Das Hauptaugenmerk sollte auf explizit definierten Folgen liegen. Im Zusammenhang mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass kann Konvergenz einer rekursiv definierten Folge gezeigt werden. z.B. $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n},\ x_0=0$. | 10 bzw. Z<br>Z<br>L+, Z |
| • Grenzwertsätze (±, •, (÷))<br>• Satz, dass konvergente Folgen beschränkt sind<br>• Satz von Bolzano-Weierstraß<br>• Sandwich-Lemma/Einschließungssatz<br>• Teilfolgen, Häufungspunkte<br>• liminf, limsup<br>• Cauchy-Folgen, Cauchy-Konvergenzkriterium<br>• Cauchy-Folgen in ***Q***, aber Grenzwert in ***R*** | Folgende Standardfolgen sollten einzeln und in Kombination behandelt werden:<br>$\frac{1}{n^p}, p \in N,$<br>$\sqrt[n]{x}, x>0,$<br>$\sqrt[n]{n},$<br>$\frac{n^p}{x^n}, p \in N, x>0$ fest,<br>$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ als erste Definition von $e$ | L+, Z<br><br>L+, Z |

Reihen (Z: 9 Stunden)

| Inhalte | Anmerkungen | Einordnung |
|---|---|---|
| • Definition Reihe als Partialsummenfolge, Konvergenz, bestimmte und unbestimmte Divergenz<br>• Notw. Konvergenzkriterium (Reihenglieder bilden Nullfolge)<br>• Standardbeispiele:<br>- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonische Reihe)<br>- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (Baseler Summe)<br>- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (Mercator-Reihe/alt. harm. R.)<br>- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (geometrische Reihe)<br>• Divergenz der harmonischen Reihe<br>• Konvergenz der Baseler Summe<br>• Minoranten-/Majorantenkriterium<br>• Konvergenz/Divergenz der geometrischen Reihe für beliebige $q$<br>• Leibniz-Kriterium<br>• Umordnung von Reihen<br>• absolute Konvergenz<br>• Wurzel-/Quotientenkriterium | Die Begriffe Partialsumme, Reihe als Partialsummenfolge (als Folge der Partialsummen) und Grenzwert einer Reihe (als Grenzwert der Partialsummenfolge) sollten sauber getrennt werden. Anmerkung: [Forster: Analysis 1] Mit dem Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ werden sowohl die Partialsummenfolge als auch, im Fall von Konvergenz, deren Grenzwert bezeichnet.<br><br>Es ist sinnvoll, die Divergenz/Konvergenz der harmonischen Reihe und der Baseler Summe zuerst „von Hand“ zu beweisen und das Minoranten-/Majorantenkriterium als Verallgemeinerung des Ansatzes zu betrachten.<br><br>Rechenregeln zu Reihen (Ausklammern eines Faktors, Zerlegung in endl. und unendl. Teil) müssen nicht unbedingt bewiesen werden. Die Schwierigkeiten beim Umordnen können am Beispiel der Mercator-Reihe gut klargemacht werden (Verlust der Kommutativität bei nicht absolut konvergenten Reihen). | Z |

Potenzreihen (Z: 3+5(Q2) Stunden)

| Inhalte | Anmerkungen | Einordnung |
|---|---|---|
| • Definition Potenzreihe, Koeffizientenfolge, Entwicklungspunkt<br>• Definition Konvergenzradius, Konvergenz innerhalb der Kugel um $x_0$ mit Radius $R$, Divergenz außerhalb, unklar für $\|x - x_0\| = R$<br>• geometrische Interpretation (in ***C***)<br>• Berechnung aus Wurzel-/Quotientenkriterium herleiten (falls der Grenzwert/der Limes superior existieren gilt):<br>$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}}$$<br>(Eingehen auf Sonderfälle $R = 0$ und $R = \infty$)<br><br>*(ab hier mit Differential-/Integralrechnung)*<br><br>• Formale Differenzierbarkeit für $\|x - x_0\| < R$<br>• Taylorreihe<br>• Taylorsche Formel, Herleitung des Restglieds in Integralform und Restglieds nach Lagrange<br>• Anwendung auf $\exp, \sin, \cos$, auch in ***C***<br>• Euler-Identität | *Je nach Verteilung der Zusatzkurse auf die Semester kann es sinnvoll sein, die Reihen und Potenzreihen zu trennen und Reihen vor Einführung der Integration und Potenzreihen danach zu behandeln.*<br>Ein geeignetes Einstiegsbeispiel ist $x^0 + x^1 + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ für $\|x\| < 1$, da die geometrische Reihe und ihr Konvergenzverhalten bereits bekannt sein sollte.<br>Anmerkung: Kugeln sind in der komplexen Zahlenebene Kreisschreiben und auf der reellen Zahlengeraden Intervalle.<br><br>Die Betrachtung der Konvergenz innerhalb des Konvergenzereichs sollte unbedingt auf ***C*** erfolgen. Dies rechtfertigt den Begriff „Radius“ und liefert bei Reihen wie $1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots = \frac{1}{1+x^2}$ eine Begründung für die Bedingung $\|x\| < 1$, weil der Ausdruck auf der rechten Seite Polstellen bei $\pm i$ hat.<br><br>„Formal Differenzieren“ heißt, die Potenzreihe wie ein Polynom zu behandeln und die einzelnen Summanden entsprechend zu differenzieren bzw. zu integrieren.<br>Beispiel: Aus $1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots = \frac{1}{1+x^2}$ lässt sich $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \ldots = \arctan(x)$ entwickeln und damit z.B. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots = \frac{\pi}{4}$ zeigen. | Z |

Stetige Funktionen (L+: 20 Stunden, Z: 8 Stunden)

| Inhalte | Anmerkungen | Einordnung |
|---|---|---|
| • Es werden reelle und komplexe Funktionen betrachtet<br>• Definition Folgenstetigkeit<br>• Definition $\varepsilon$-$\delta$-Stetigkeit und geom. Deutung<br>• Satz über Äquivalenz beider Stetigkeitsdef.<br>• Beispiele für stetige Funktionen (Polynome, rat. Funktionen) und typische Unstetigkeiten (Sprünge, Polstellen,…)<br>• Satz: Summe von stet. Funktionen ist stetig<br>• Satz: Verkettung stetiger Funktionen ist stetig<br>• Stetigkeit der Umkehrung (evtl. exemplarisch)<br>• gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit<br>• Zusammenhang der drei Stetigkeitsbegriffe<br>• Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzung, einseitige Grenzwerte<br>• Nullstellensatz, Zwischenwertsatz<br>• Satz vom Minimum/Maximum<br>• Satz: Stetige Funktionen sind auf beschränkten und abgeschlossenen Mengen gleichmäßig stetig. | Hier sollte unbedingt deutlich werden, dass das Einsetzen *einer* Testfolge *kein* Nachweis der Stetigkeit einer Funktion ist. Es müssten *alle* Testfolgen betrachtet werden.<br><br>Geeignete Beispiele sind: $x \mapsto \operatorname{sgn}(x), \sin\left(\frac{1}{x}\right), \begin{cases} 0, & x \text{ rational} \\ 1, & x \text{ irrational} \end{cases}$<br>$\frac{\sin(x)}{x}, \frac{\cos(x)-1}{x}, \frac{\lvert x\rvert}{x}, x^p \sin\left(\frac{1}{x}\right), \frac{x^2-1}{x-1}$<br><br>Beispiele:<br>- $x \mapsto x^2, \frac{1}{x}$ stetig<br>- $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig<br>- $\sin$ Lipschitz-stetig<br><br>Anwendungen des Nullstellensatzes:<br>- ungeradzahlige Polynome haben mind. eine reelle Nullstelle<br>- geradzahlige Polynome mit $a_0 a_n < 0$ haben zwei reelle NS<br><br>Da nur über $\boldsymbol{R}$ gearbeitet wird, kann der Begriff „kompakt“ vermieden und durch „beschränkt und abgeschlossen“ ersetzt werden. | L+<br>Z<br>Z<br>L+, Z<br><br><br><br>L+<br>Z<br>Z<br>Z<br><br>L+<br><br>Z<br><br>Z<br>Z |

Differentialrechnung (L+: 25 Stunden, Z: 10 Std.)

| Inhalte | Anmerkungen | Einordnung |
|---|---|---|
| • Es werden nur reelle Funktionen betrachtet.<br>• Definition Differenzierbarkeit, geom. Interpretation, Lagrange- ($f'$) und Leibniz-Notation ($\frac{df}{dx}$), höhere Ableitungen | Differenzierbarkeit sollte auf Intervallen (bei abgeschlossenen Intervallen werden einseitige Grenzwerte betrachtet) eingeführt werden und plausibel gemacht werden, warum die Umgebungen offen sein müssen (man braucht ja noch etwas „Platz“, um sich mit dem Differenzenquotienten der betrachteten Stelle zu nähern). | L+ |
| • Ableitungsregeln mit Beweisen (±, •, (÷), Kettenregel) | Beispiele: Polynome, Betrags-, Wurzel- und andere Potenzfunktionen | L+ |
| • Ableitung der Umkehrfunktion mittels Kettenregel herleiten | Im Zusatzkurs kann auch das Beispiel einer stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktion besprochen werden:<br>$f: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ | Z |
| • notw. Kriterium für lok. Extrema<br>• Satz von Rolle, Mittelwertsatz der Differenzialrechnung | Anwendung: Interpretation der Lipschitz-Konstanten bei differenzierbaren Funktionen | Z |
| • Zusammenhang Monotonie und Ableitung<br>• hinr. Kriterien für Extrema (2. Abl., Monotonie) | Hier sollte auf die Implikationskette eingegangen werden:<br>*hinr. Kriterium => Existenz einer Extremstelle => notw. Kriterium* | L+ |
| | sowie mit geeigneten Beispielen/Gegenbeispielen gearbeitet werden<br>- $\lvert \cdot \rvert$ hat lok. Extremum aber keine NS bei der Ableitung<br>- $x \mapsto x^4$ hat lok. Extremstelle aber trotzdem die zweite Abl. $0$ | L+ |
| • Krümmungsverhalten (über Anstieg der 1. Abl.), Wendepunkte | exakte geom. Deutung der Krümmung | L+, Z |
| • L’Hospital (Beweis für „$\frac{0}{0}$“, der Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“ muss nicht bewiesen werden) | Anwendungsbeispiele, auch $0 \cdot \infty$ und Gegenbeispiele bei denen Voraussetzungen nicht erfüllt sind | L+, Z |
| • Newton-Verfahren | Ggf. Im Kontext des Fixpunktsatzes von Banach | |