Tag der Mathematik — 6. Mai 2023

Die Welt der partiellen Differenzialgleichungen

Gaëtan Borot

Institut für Mathematik & Institut für Physik

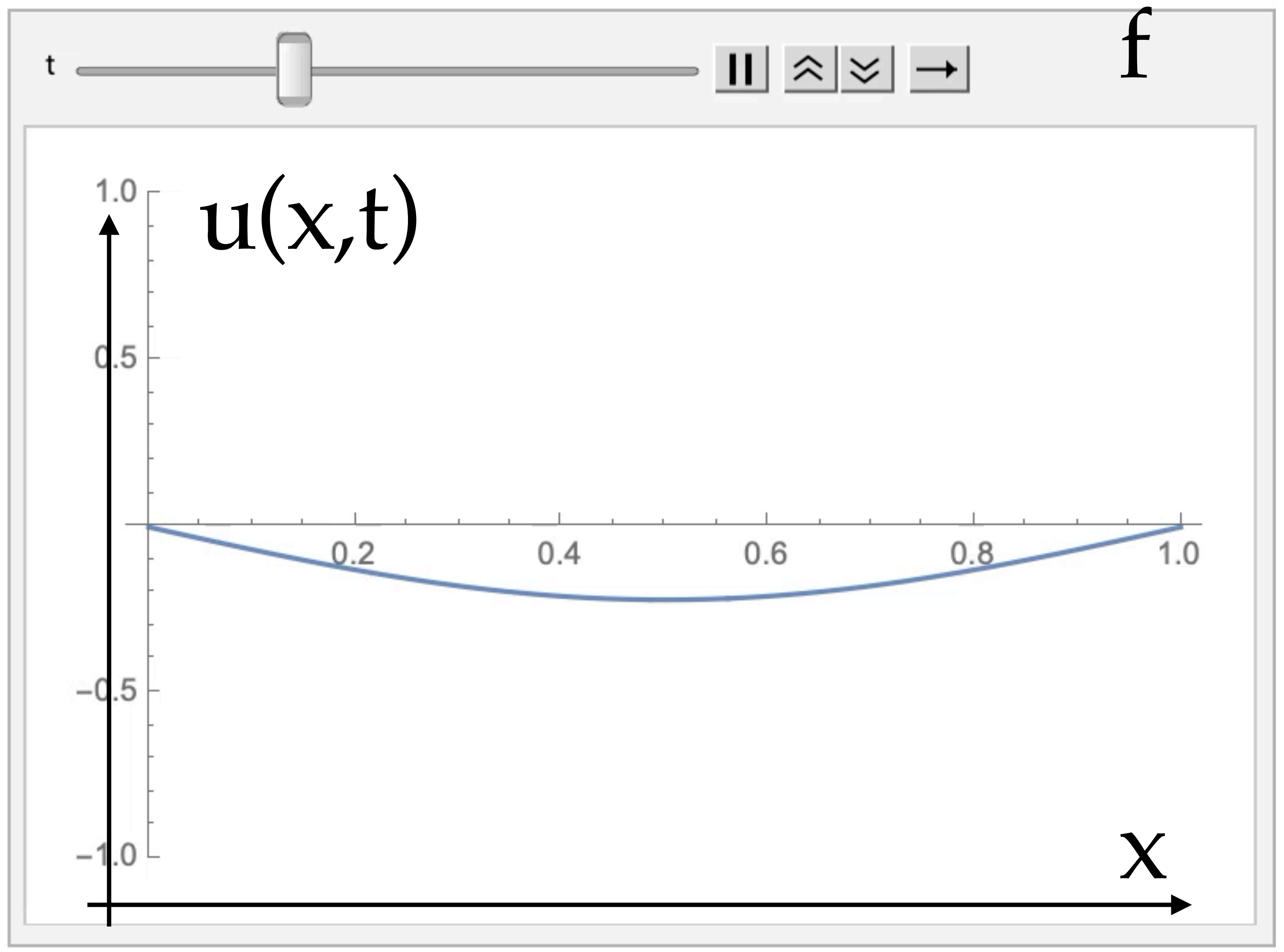
Luis Caffarelli

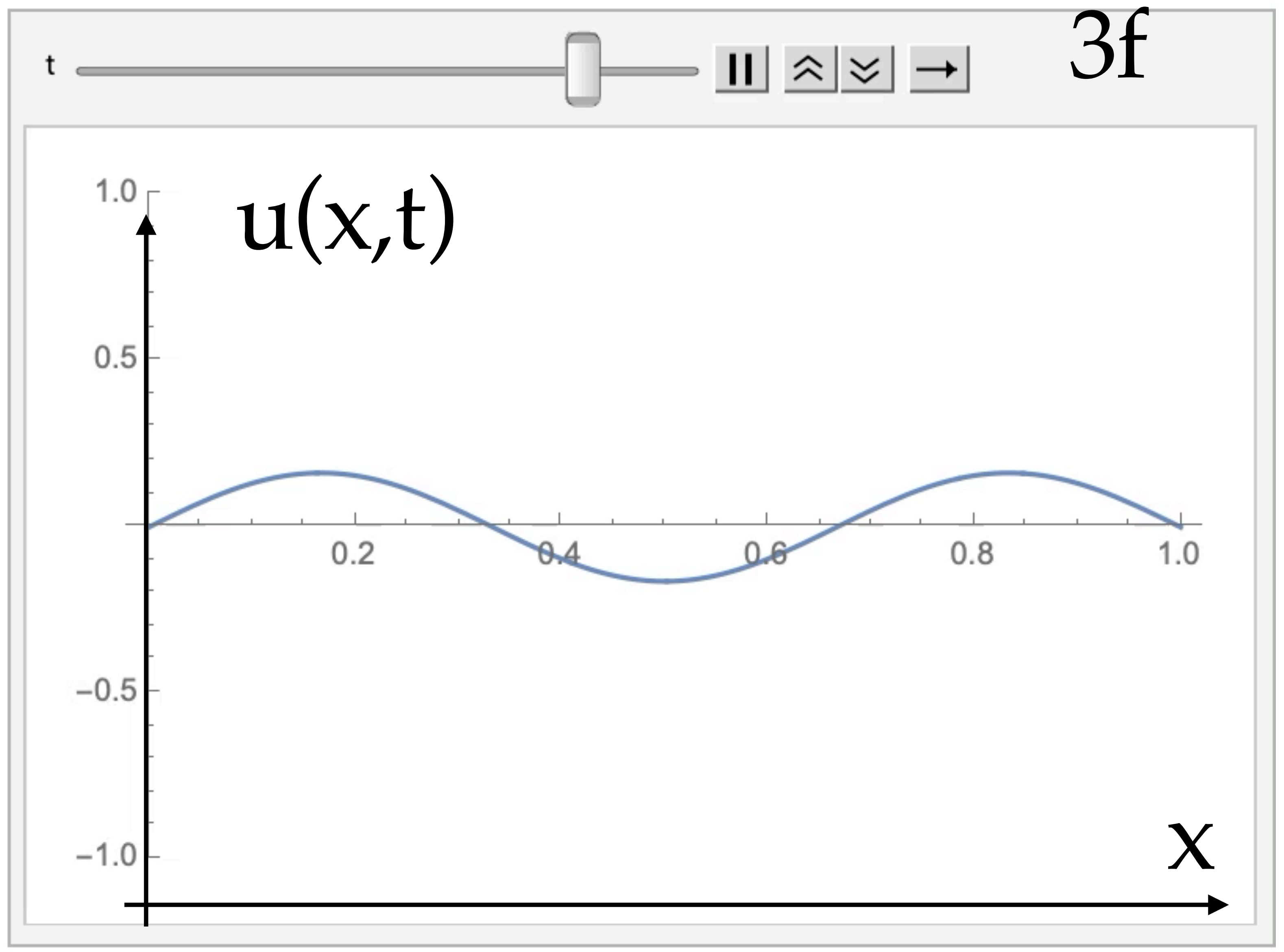
wurde 2023 mit dem Abel Preis ausgezeichnet

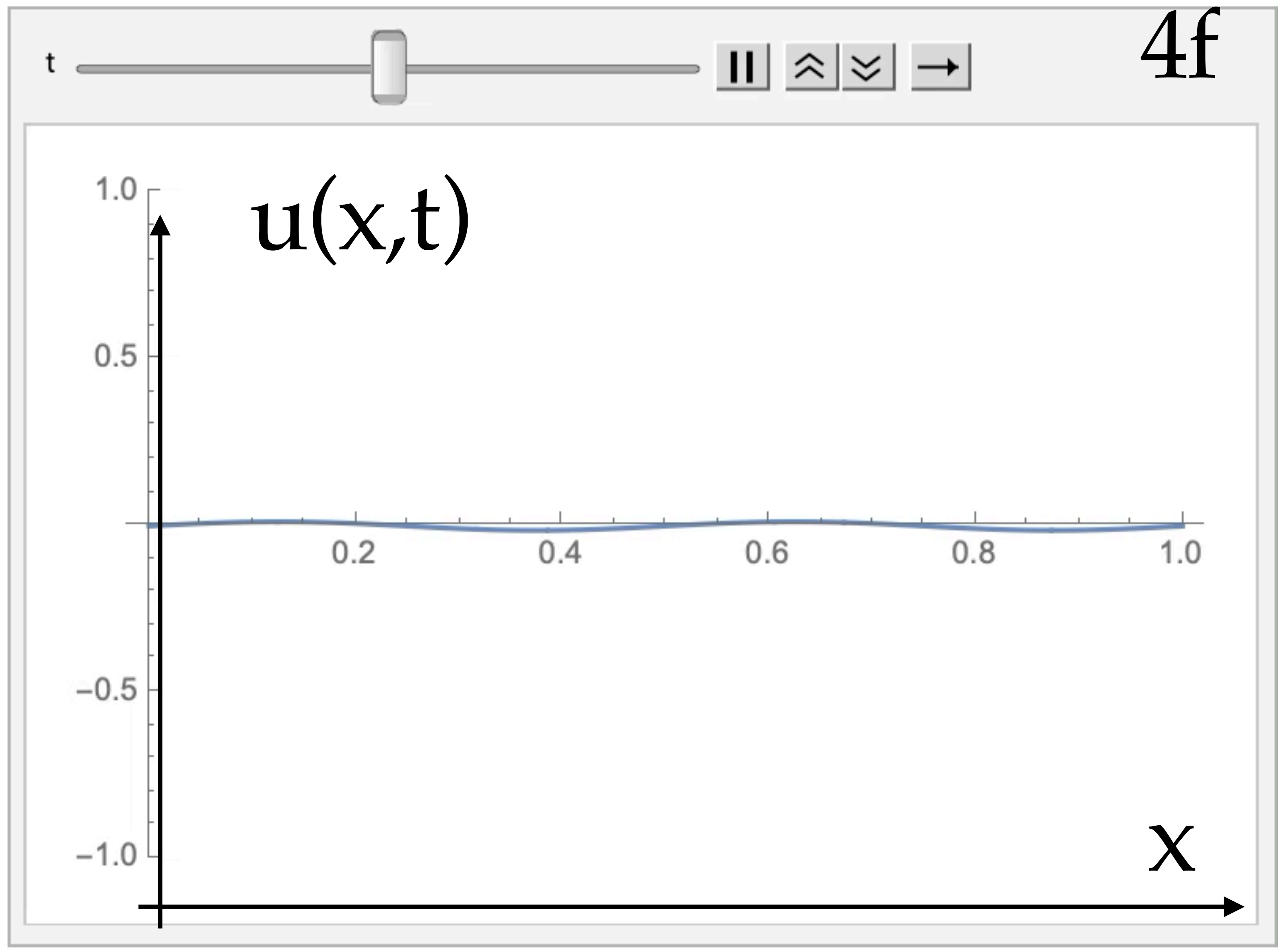
" für seine bahnbrechenden Beiträge zu der Regularitätstheorie von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, insbesondere von Freien Randwertsproblemen …"

Diese Gleichungen stammen aus der Beschreibung von natürlichen Phänomenen

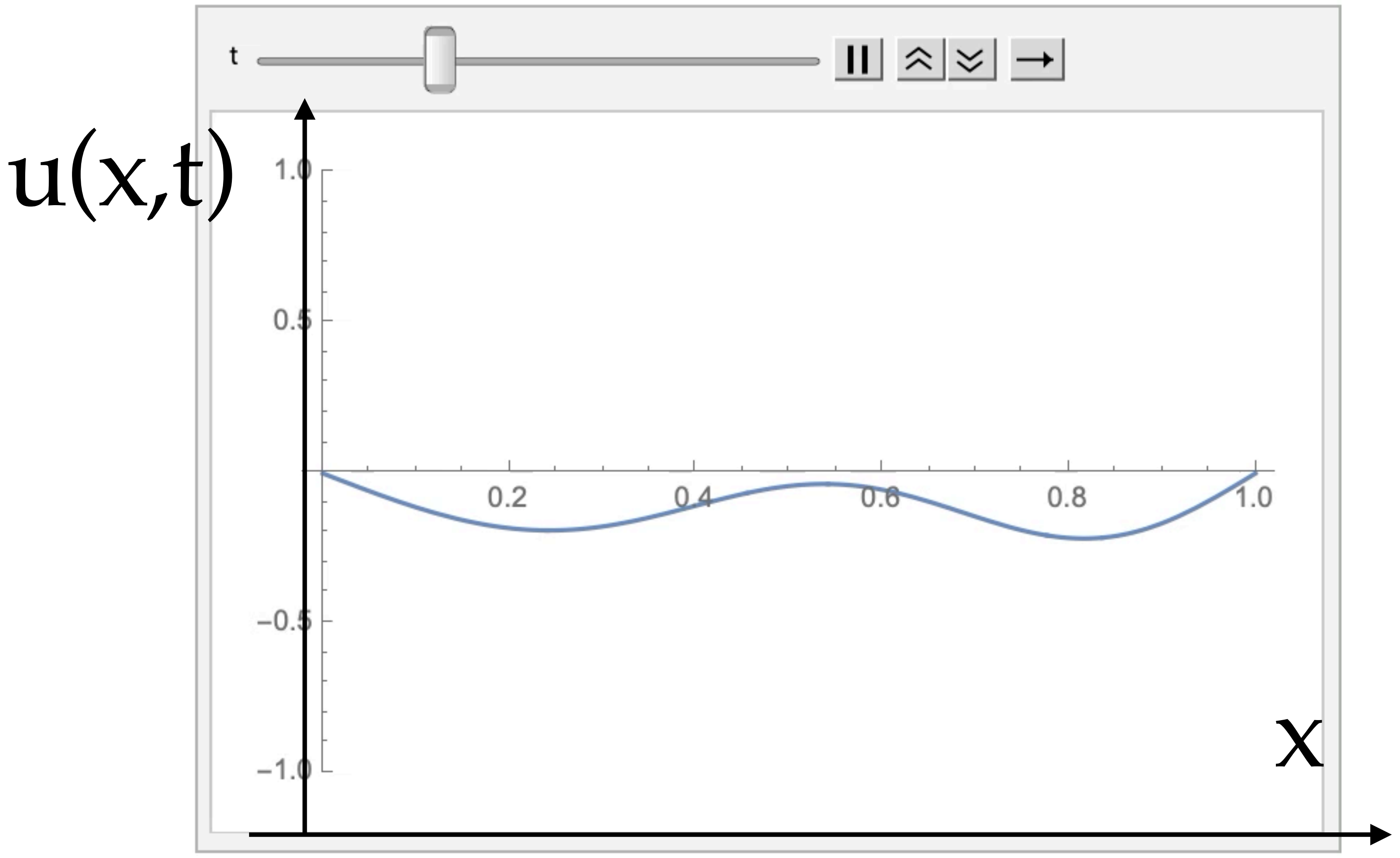
1 Erste Erscheinung — Musiktheorie



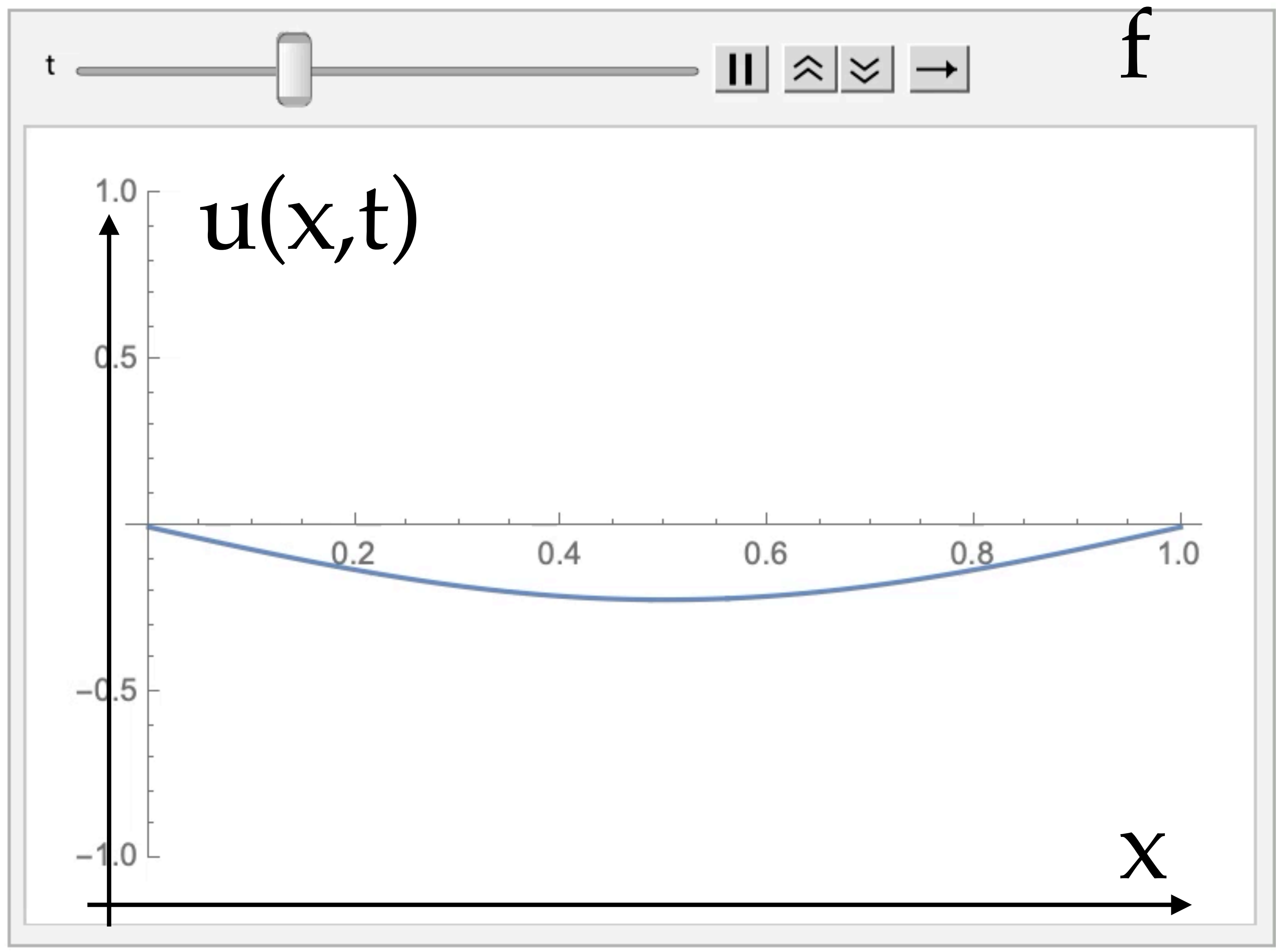


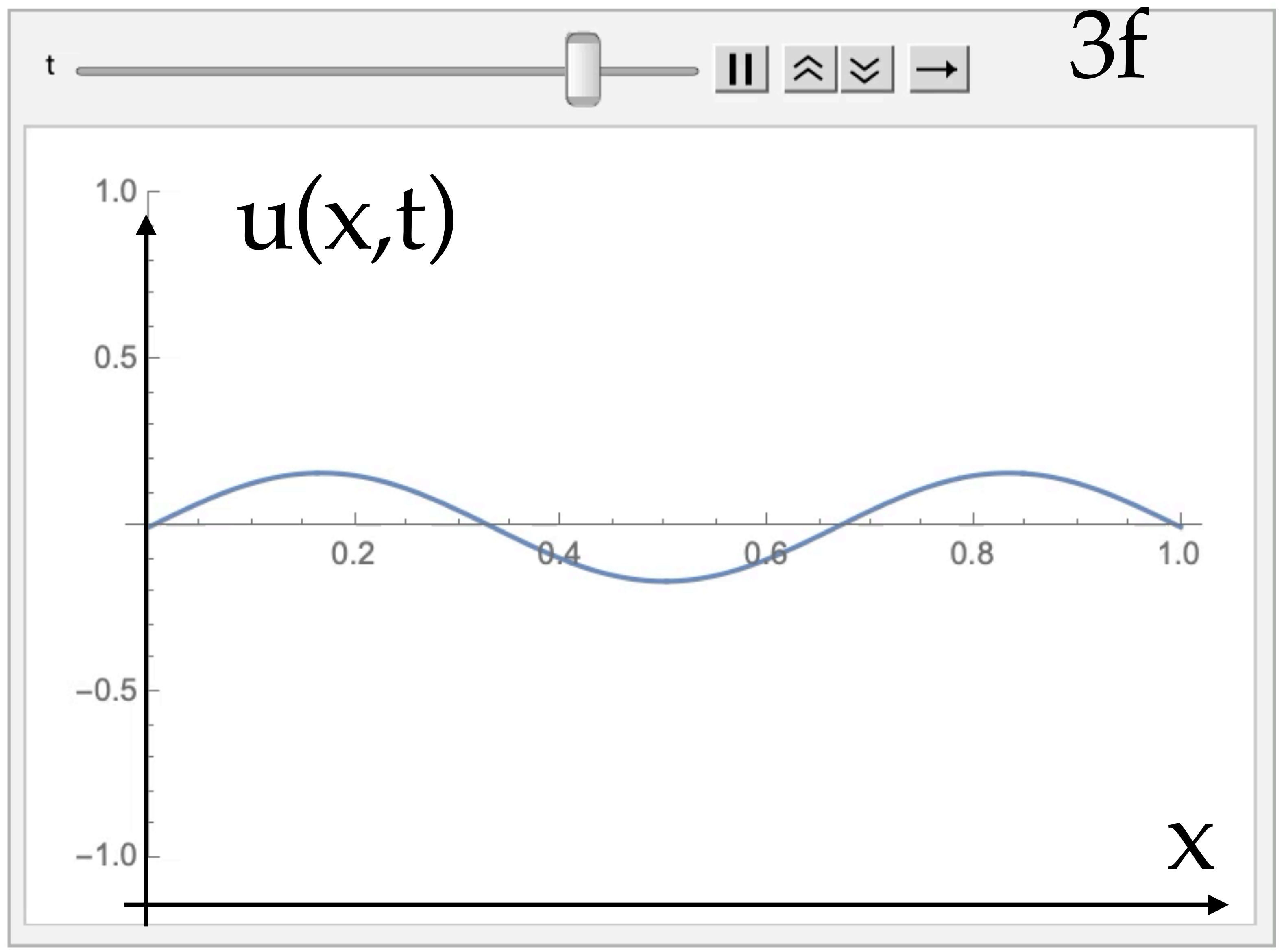


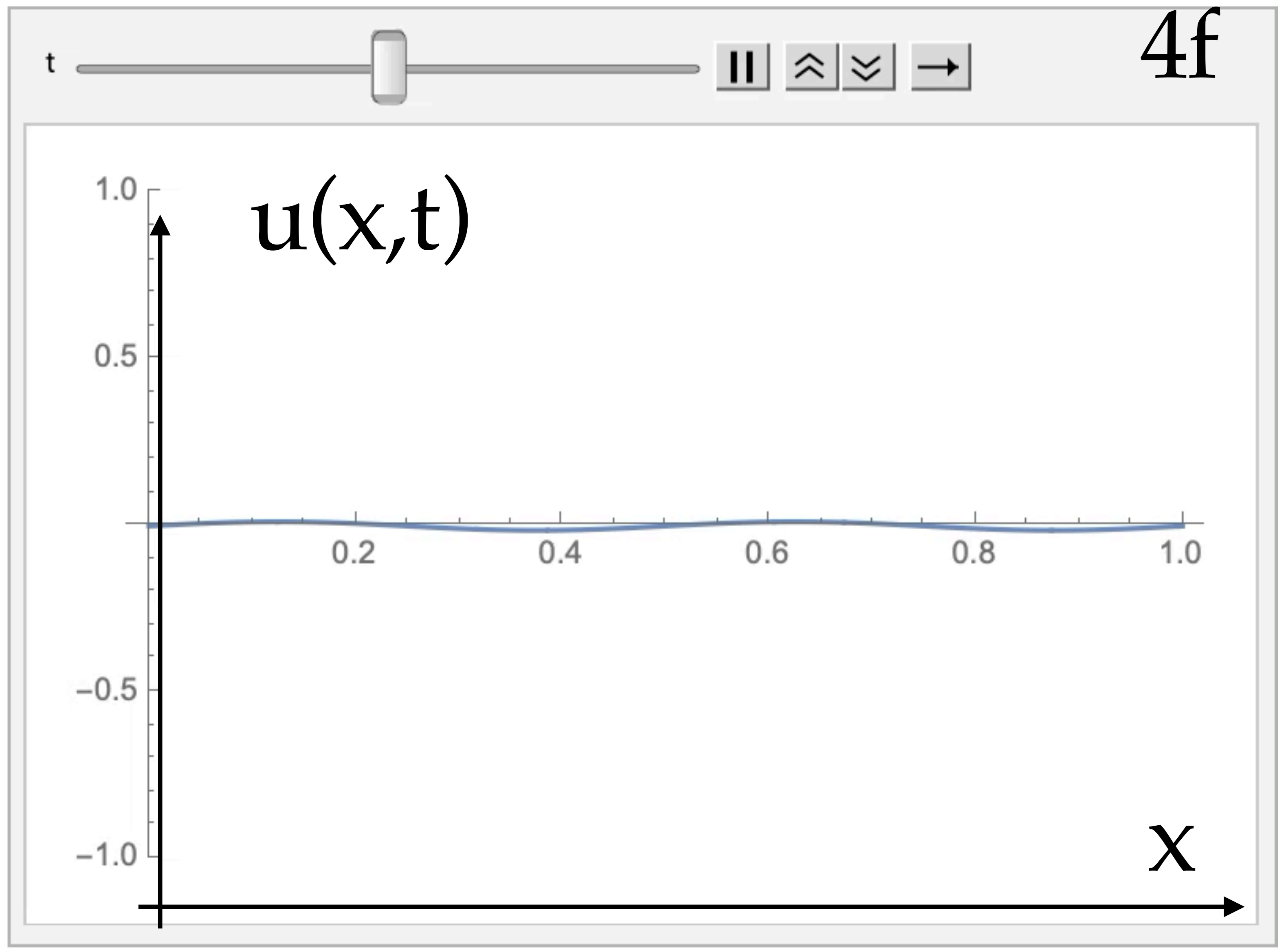
Superpositionsprinzip



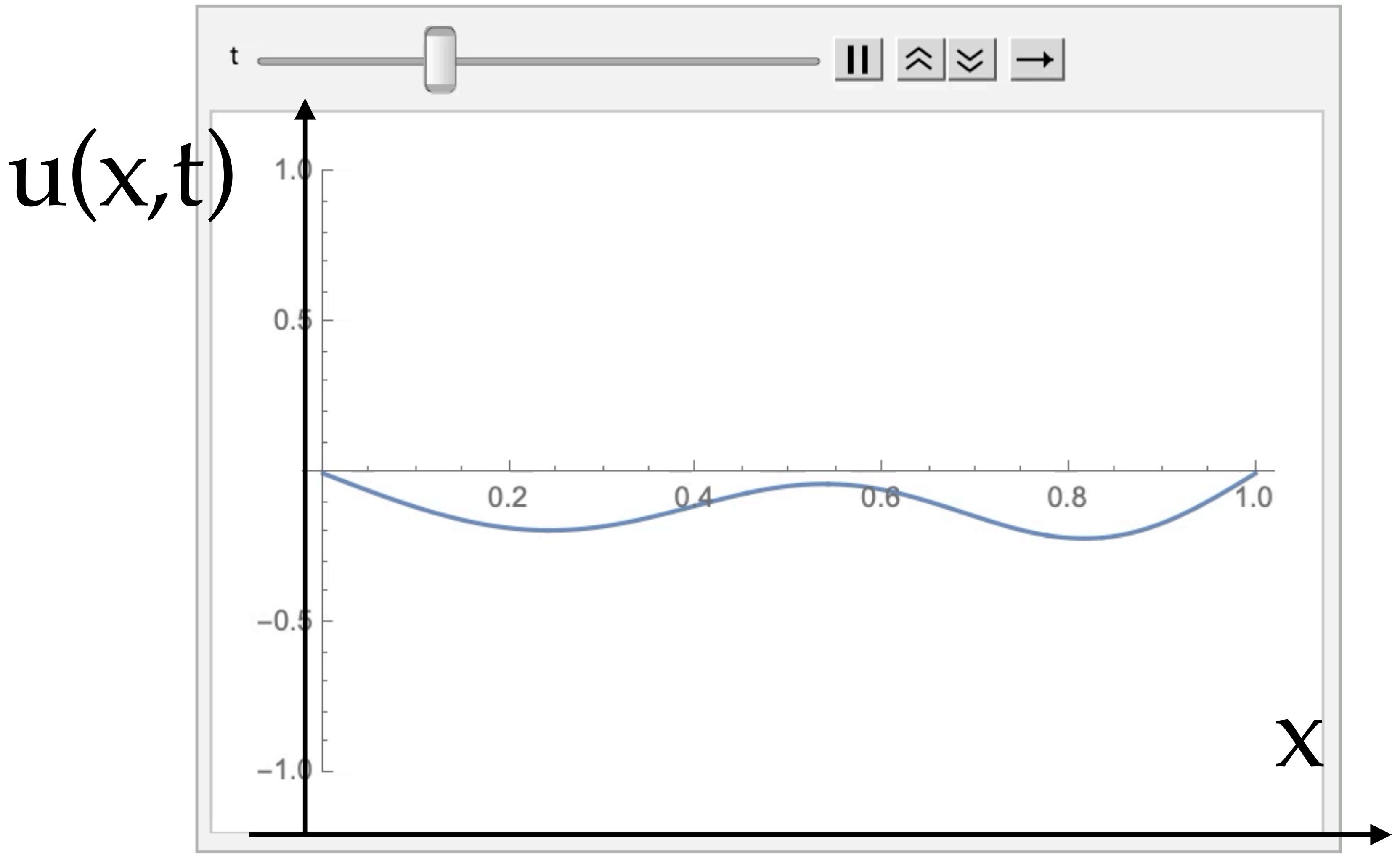
1 Erste Erscheinung — Musiktheorie

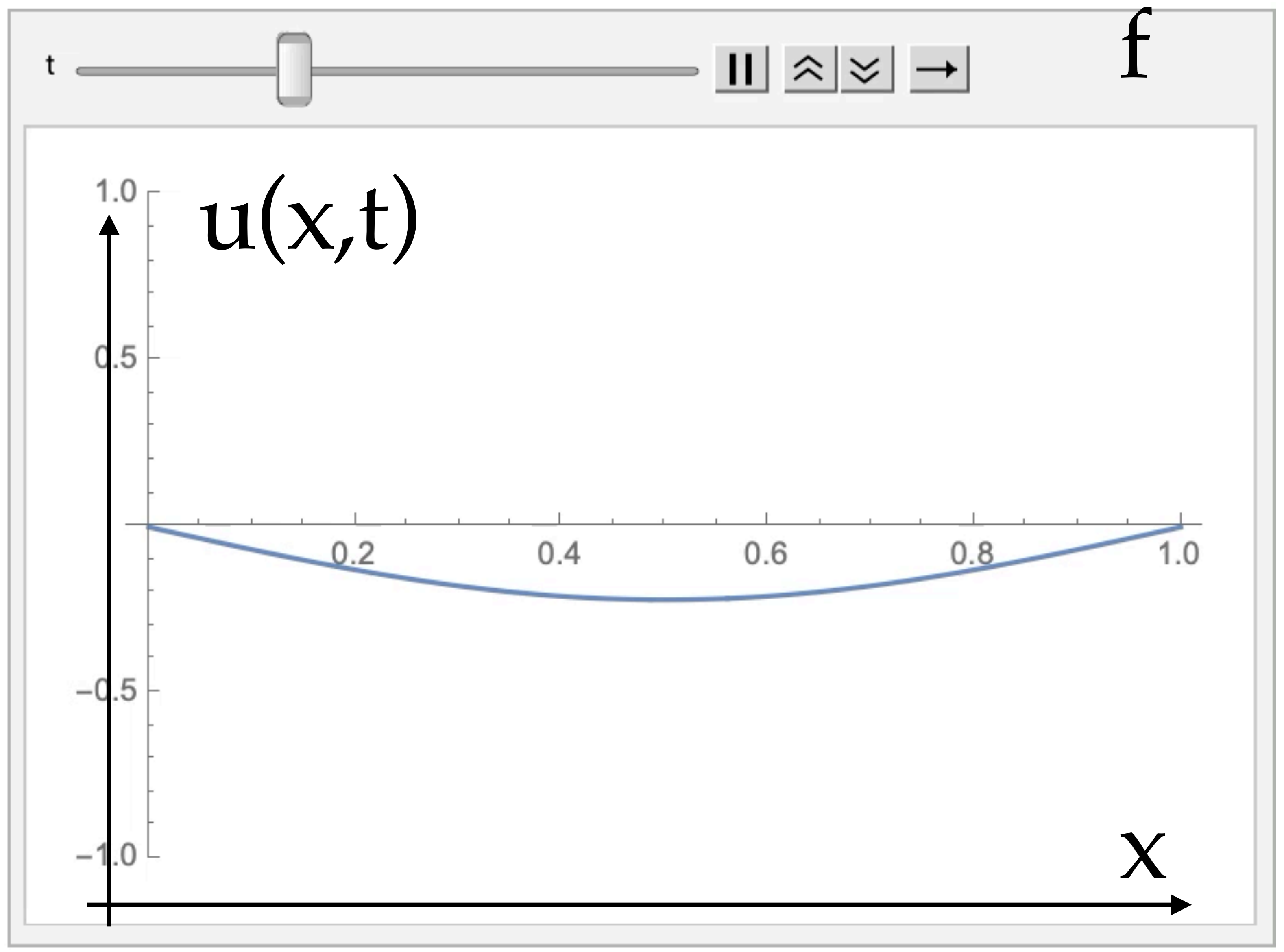


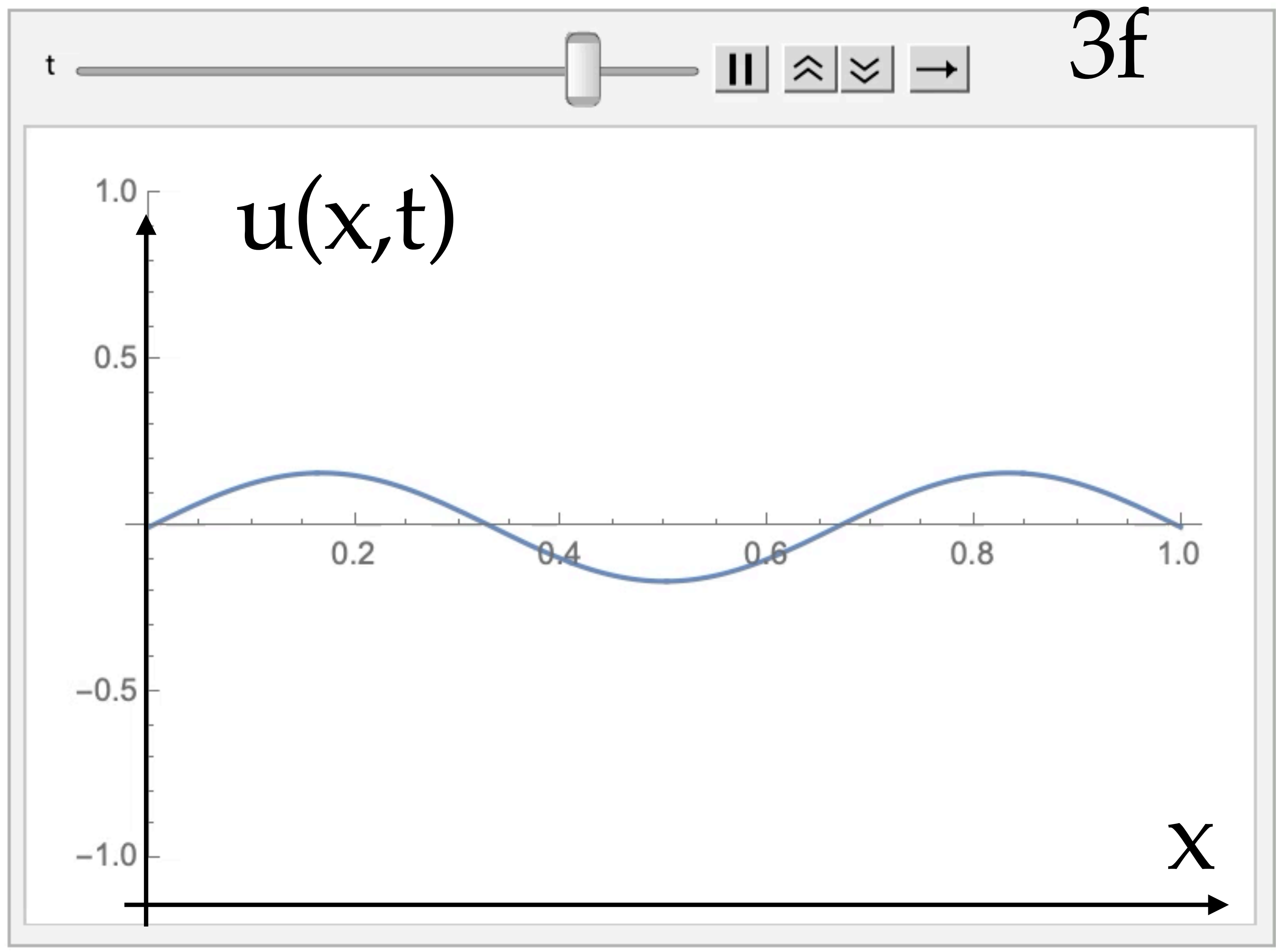


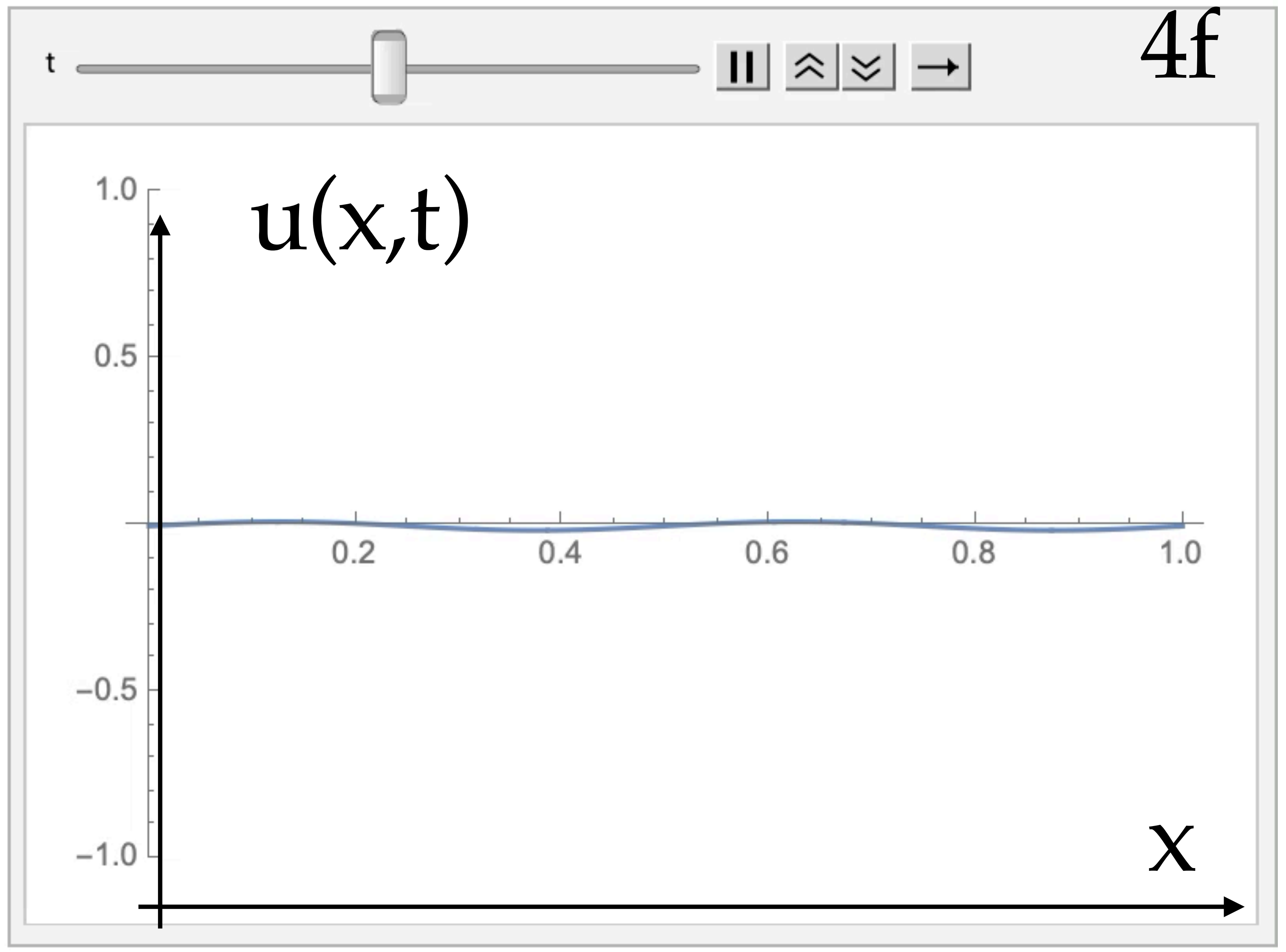


Superpositionsprinzip

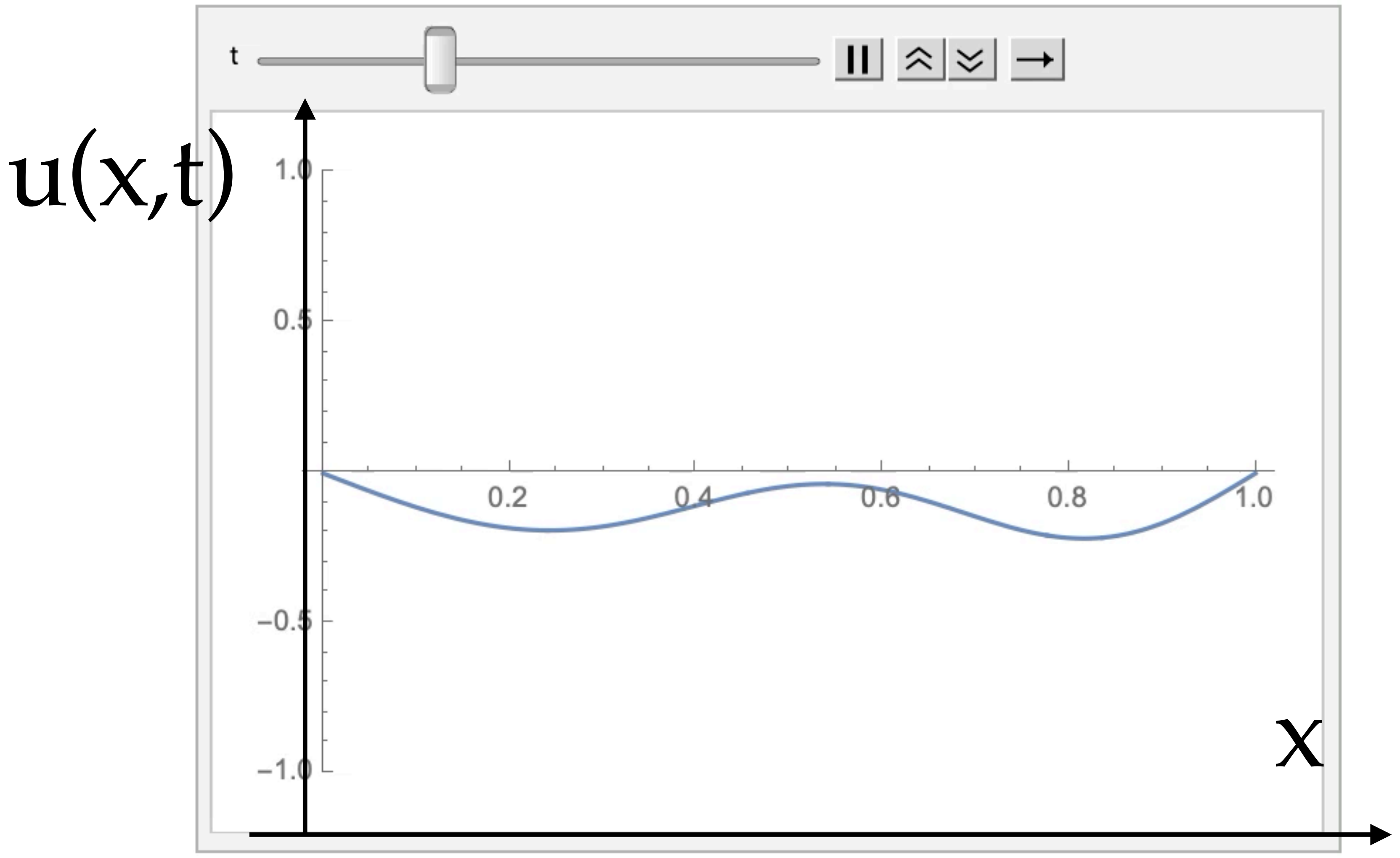




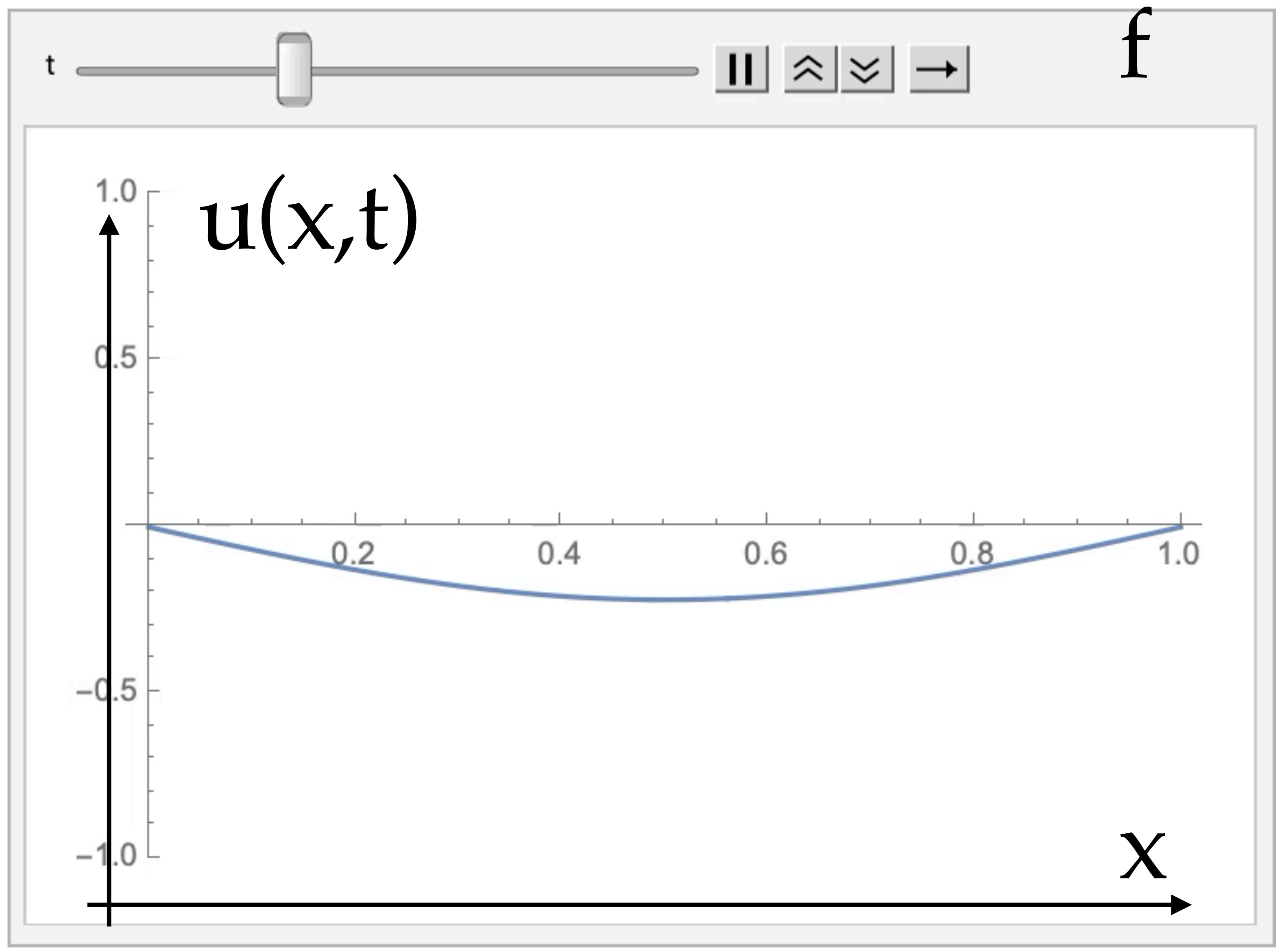


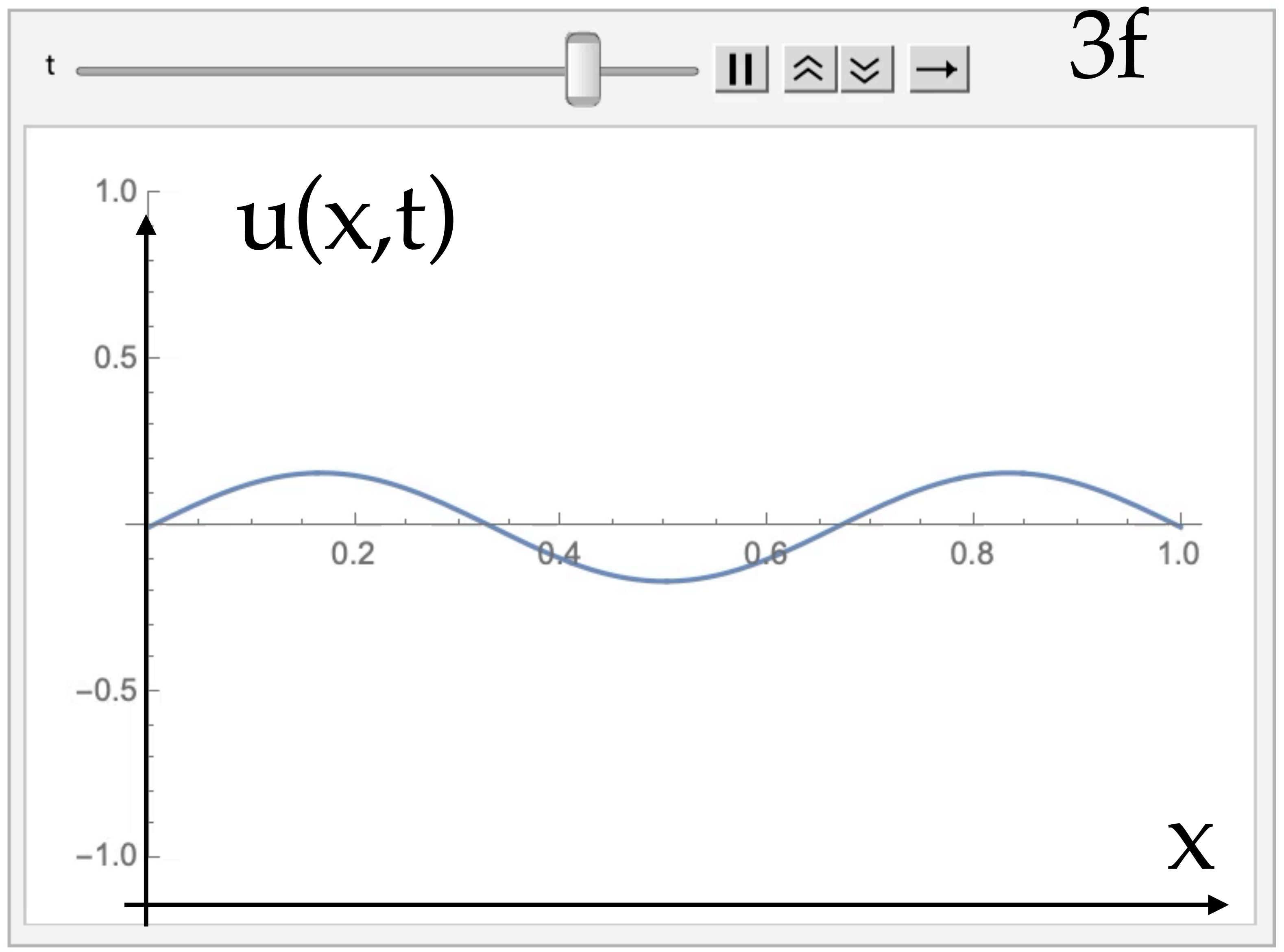


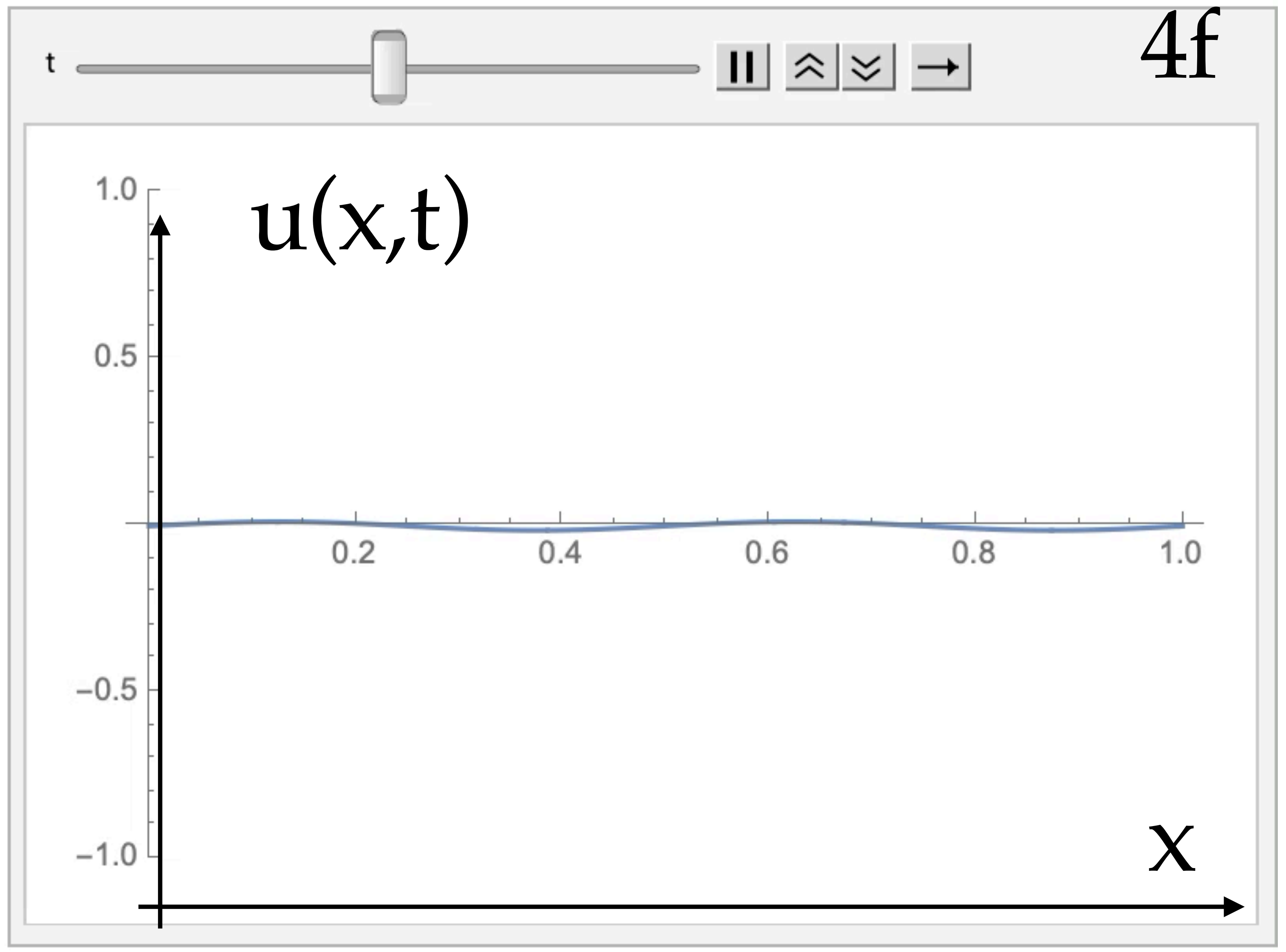
Superpositionsprinzip



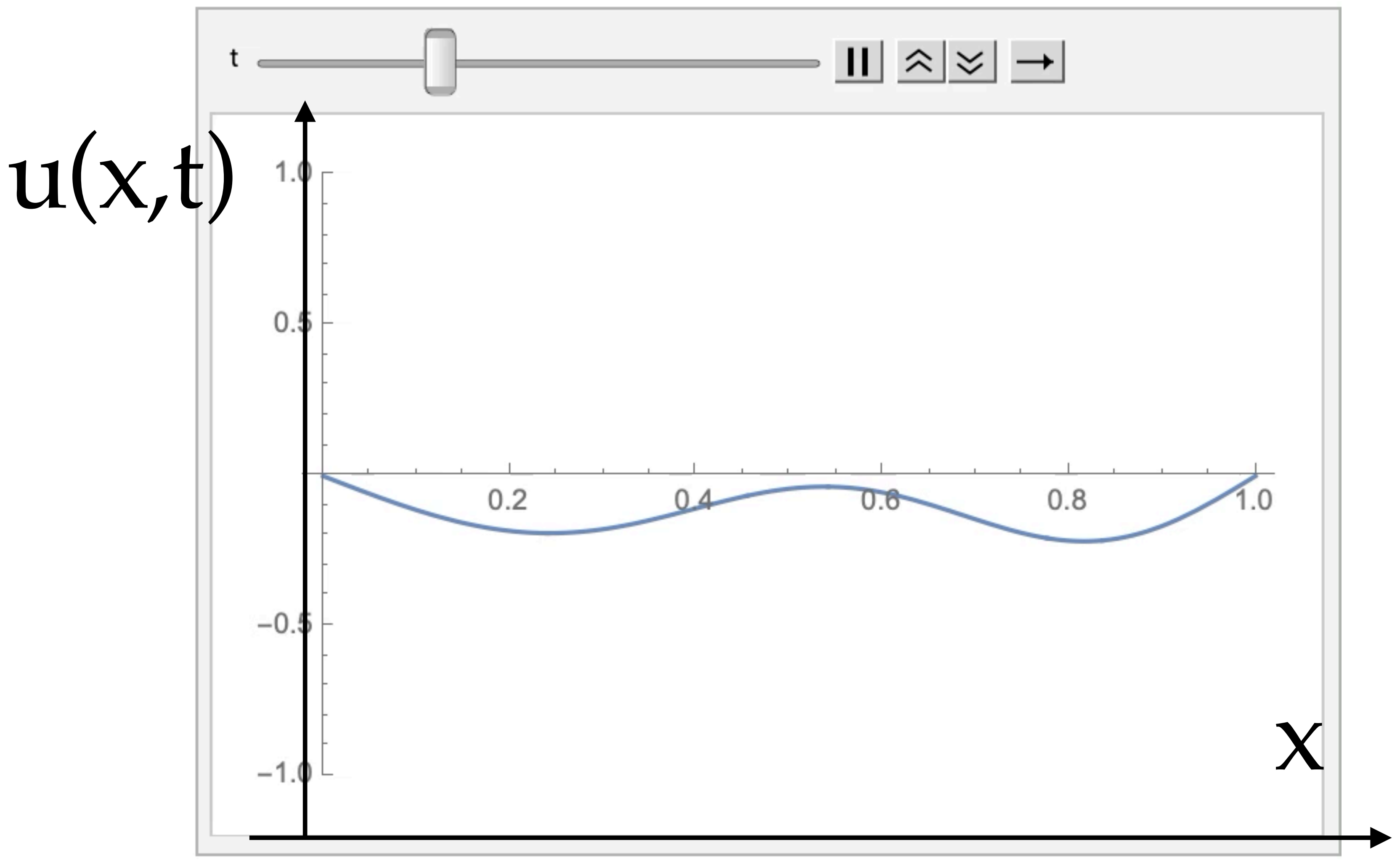
1 *Erste Erscheinung — Musiktheorie*

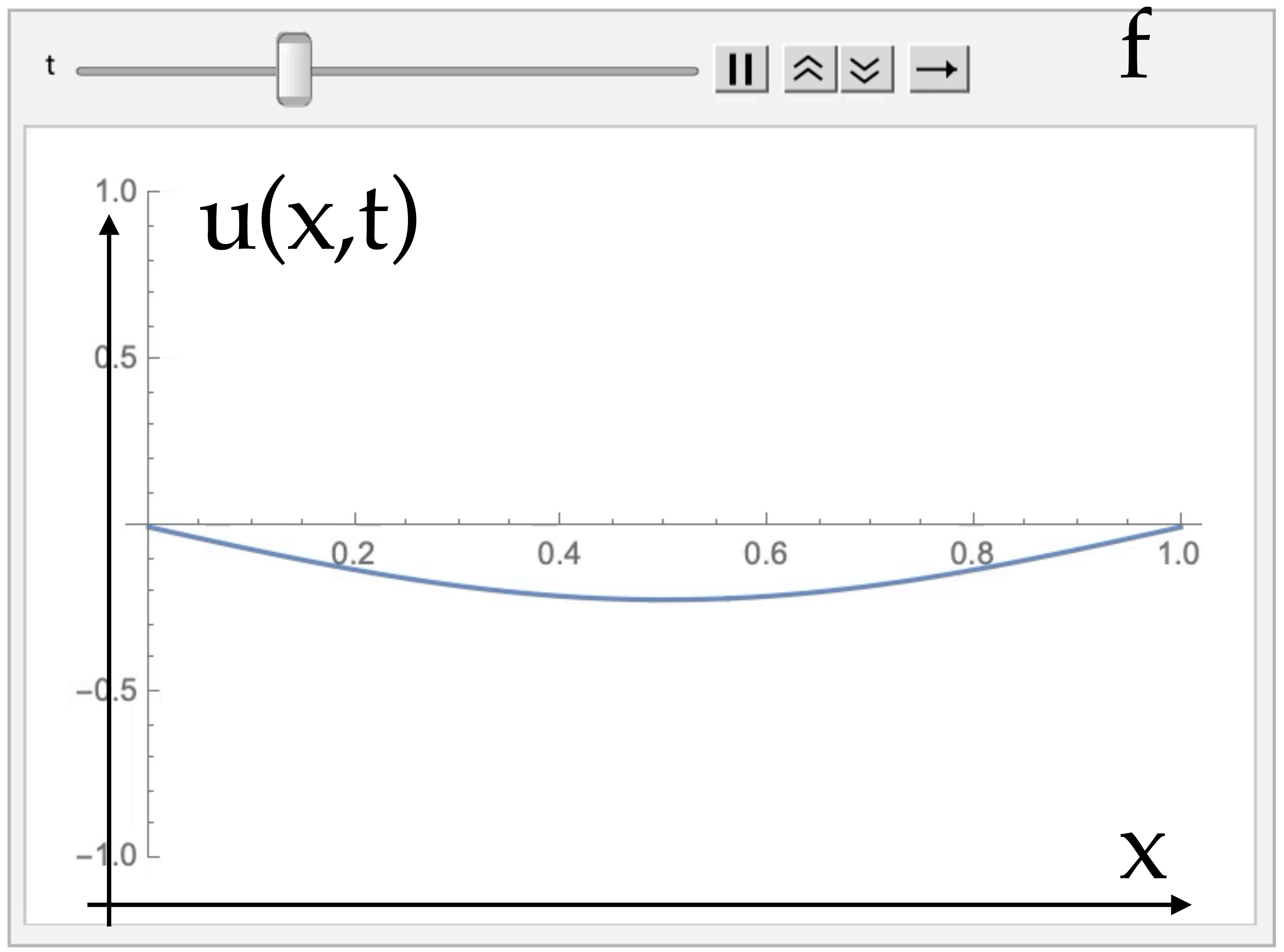


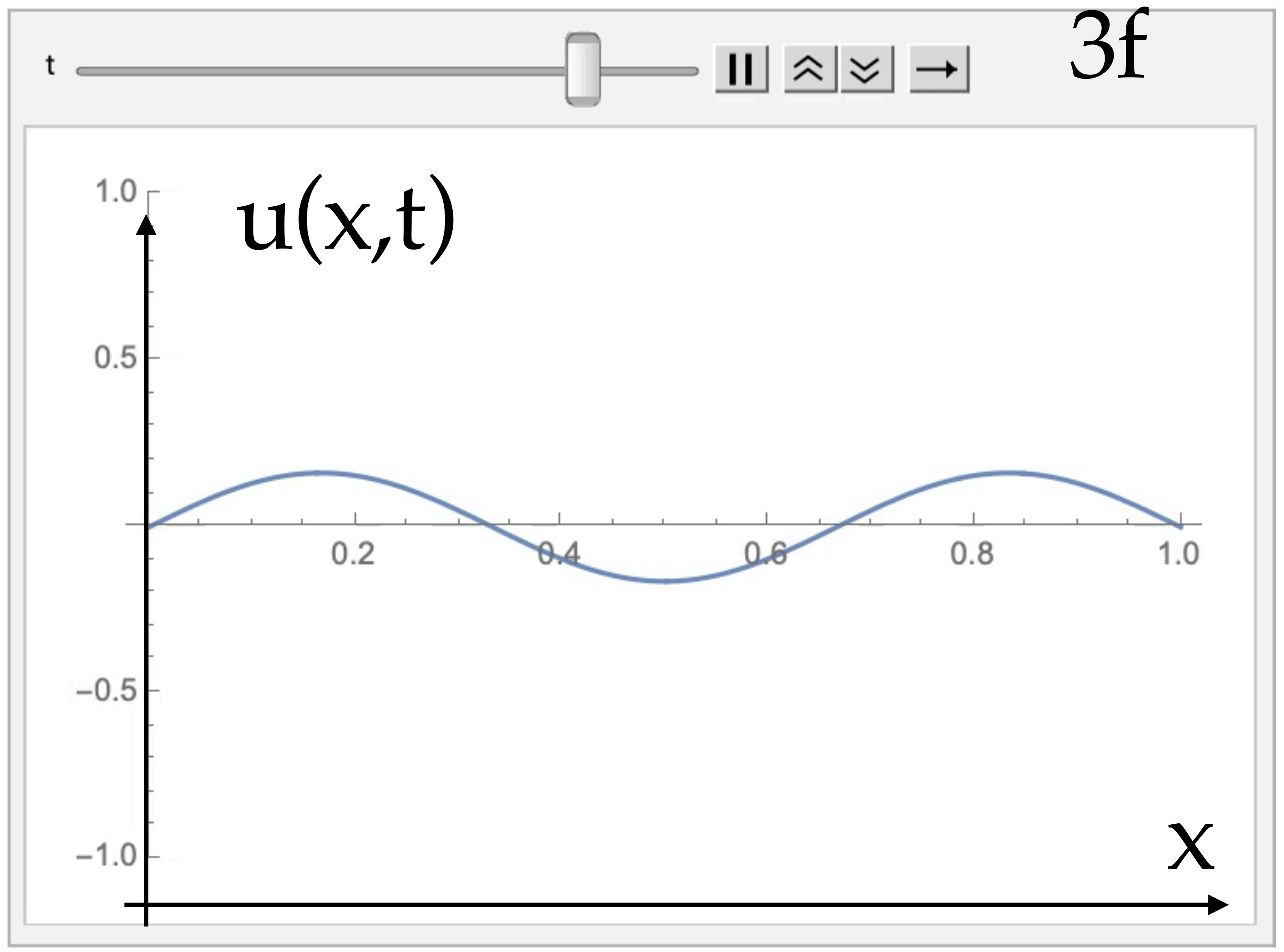


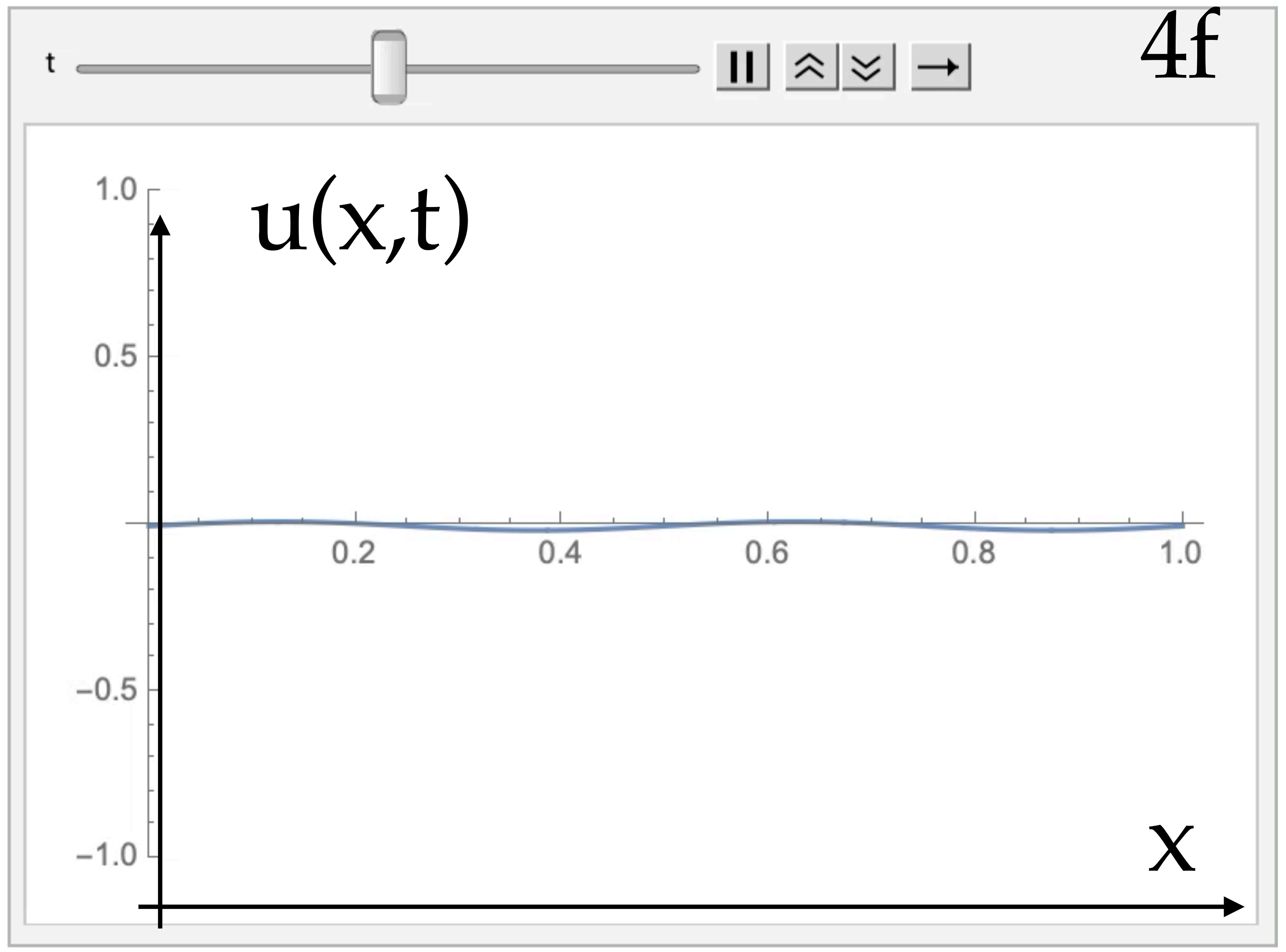


Superpositionsprinzip

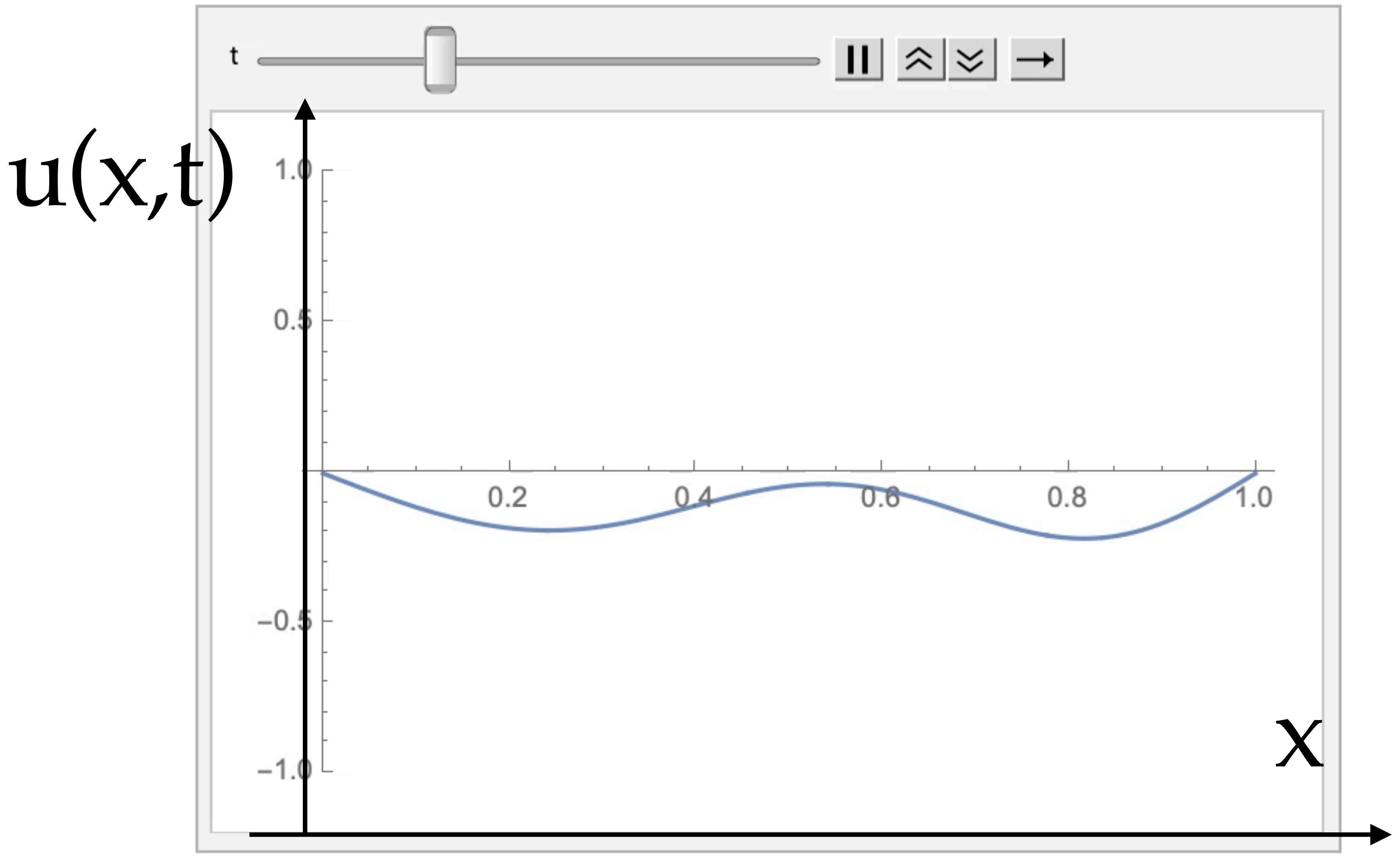








Superpositionsprinzip



Schwingungen einer Saite, am Rand festgehalten (Cello)

Höhe einer Note $\longleftrightarrow$ Schwingungsfrequenz

Beobachtungen

Cello Hörspiel

Mögliche Frequenzen: $\mathtt{f}, 2\mathtt{f}, 3\mathtt{f}, 4\mathtt{f}, \ldots$

Superpositionsprinzip

Schwingungen einer Saite, am Rand festgehalten (Cello)

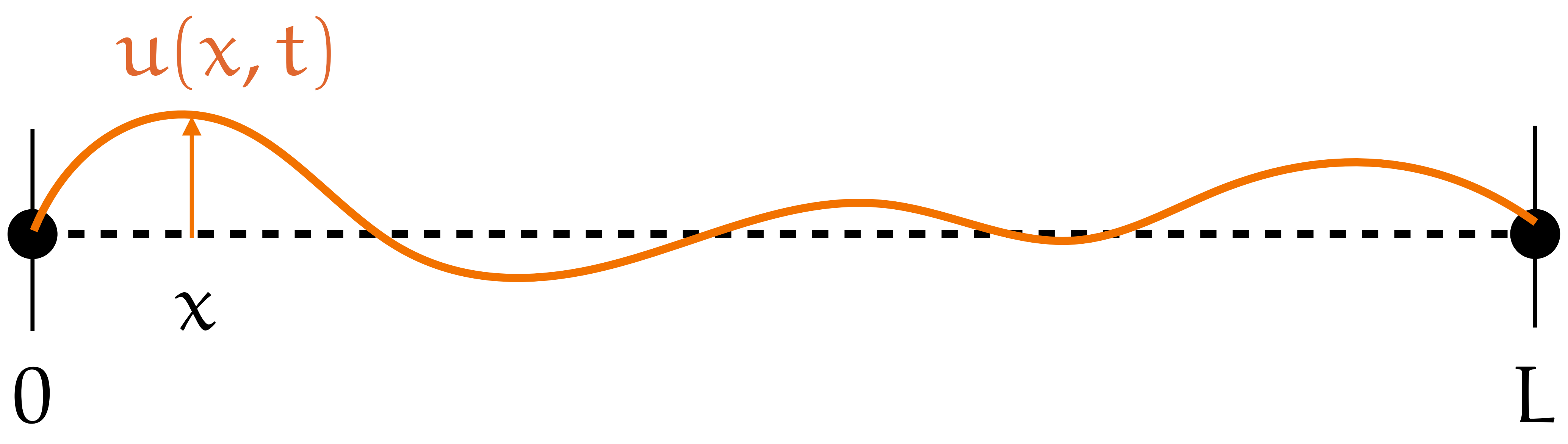
Höhe einer Note $\longleftrightarrow$ Schwingungsfrequenz

Beobachtungen

Cello Hörspiel

Mögliche Frequenzen: $\mathtt{f}, 2\mathtt{f}, 3\mathtt{f}, 4\mathtt{f}, \ldots$

Superpositionsprinzip



Modellierung: d'Alembertsche Gleichung (1746)

$$\partial_x^2 u(x,t) - c^2 \partial_t u(x,t) = 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Genügt dem Superpositionsprinzip:

Seien $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$ Lösungen, ist $u_1(x,t) + a \cdot u_2(x,t)$ auch eine Lösung

Erklärt die Schwingungsfrequenzen $f, 2f, 3f, 4f, \ldots$ (hier: $f = \frac{c}{2\pi}$)

1746 Alle Lösungen sind der Form $u(x,t) = h(ct - x) - h(ct + x)$
wobei h eine beliebige ungerade 2L-periodische Funktion ist

Beispiel : Schwingungen mit Frequenz nf entsprechen $h_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$

1822 hat Fourier vorgeschlagen:

Alle "netten" ungeraden 2L-periodischen Funktionen lassen sich als

$h(z) = a_0 + a_1 \cdot h_1(z) + a_2 \cdot h_2(z) + \cdots$ (unendlich viele Noten) darstellen

Sinn und Gültigkeit wurde nur in 1. Hälfte des 20. Jhs. zufriedestellend verstanden

Was kann man von der Mathematik erwarten?

1. Modellierungen (Physik) liefern Gleichungen für eine Funktion $u(p,t)$

   die relevante Größen als Funktion der Position p und Zeit t beschreibt

2. Die Mathematik sucht nach einer passenden Rahmen, in dem

   - die Gleichung einen genauen Sinn hat

   - die einfachsten Beobachtungen / Erwartungen erfüllt werden

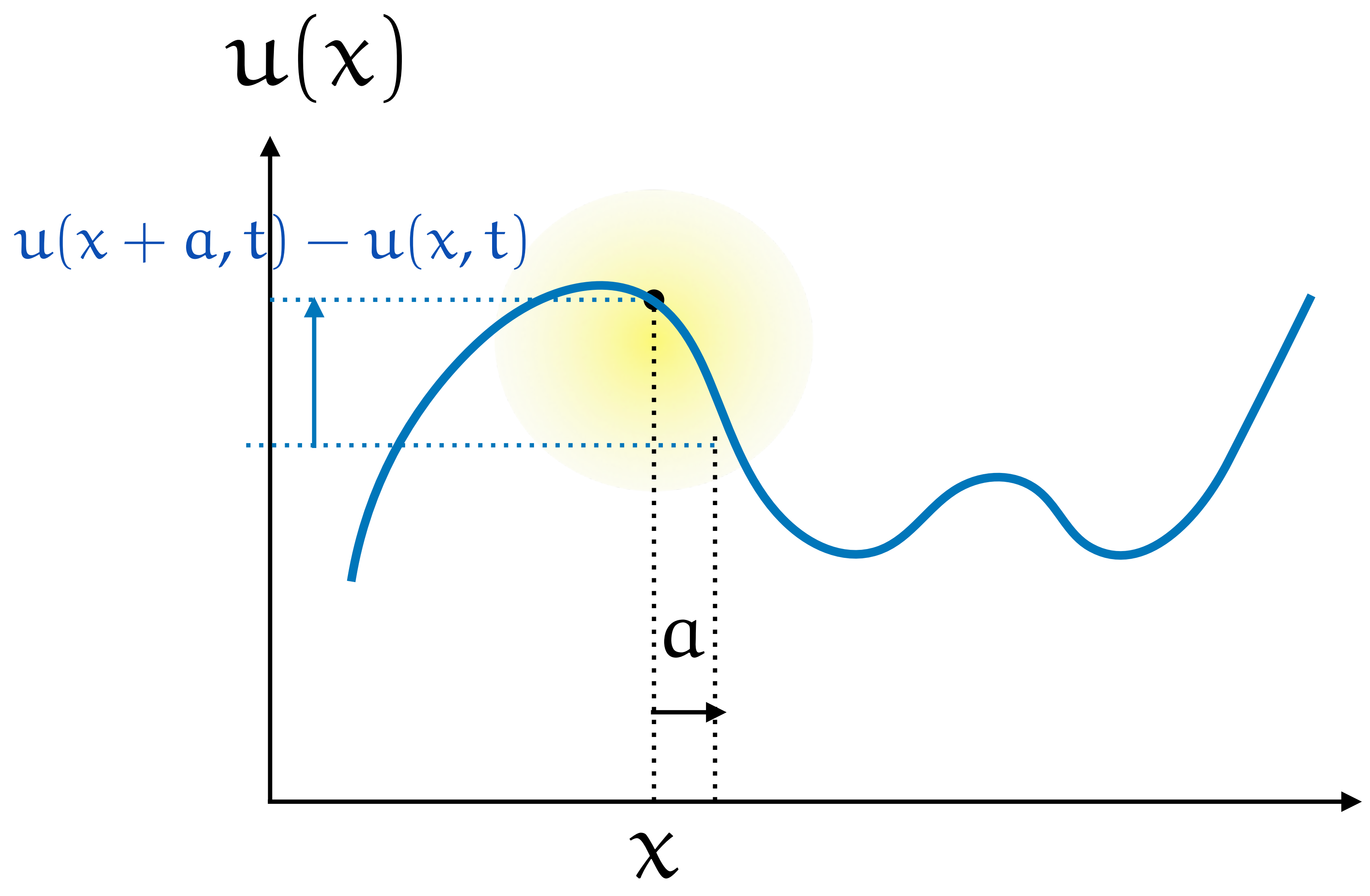
3. Wir möchten dann

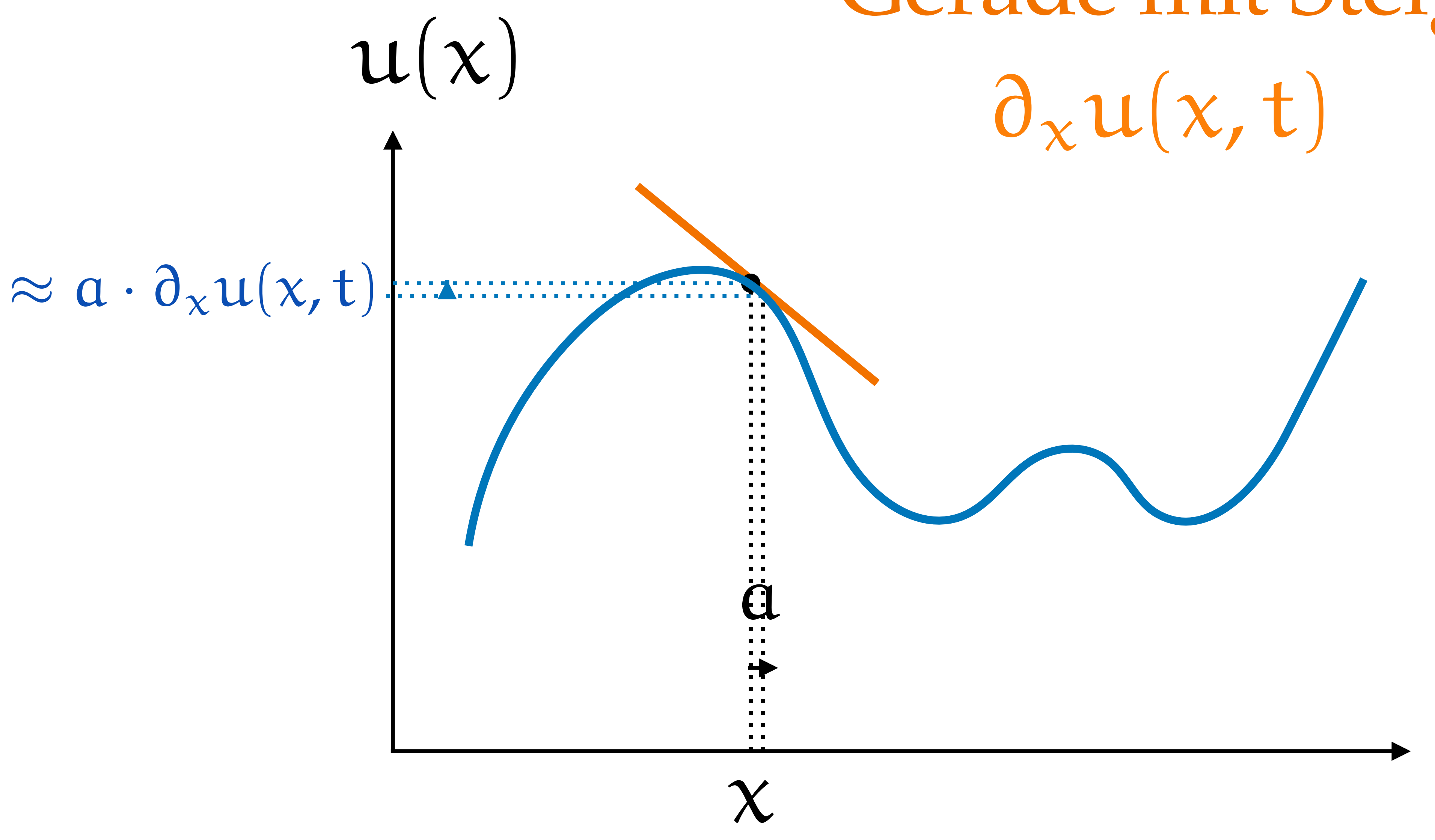
   - die Existenz (!) von Lösungen zeigen $\exists$

   - alle Lösungen (oder mindestens ihre Eigenschaften) bestimmen $\forall$

   sodass wir prognosefähig werden !

Bedeutung von $\partial_x u$





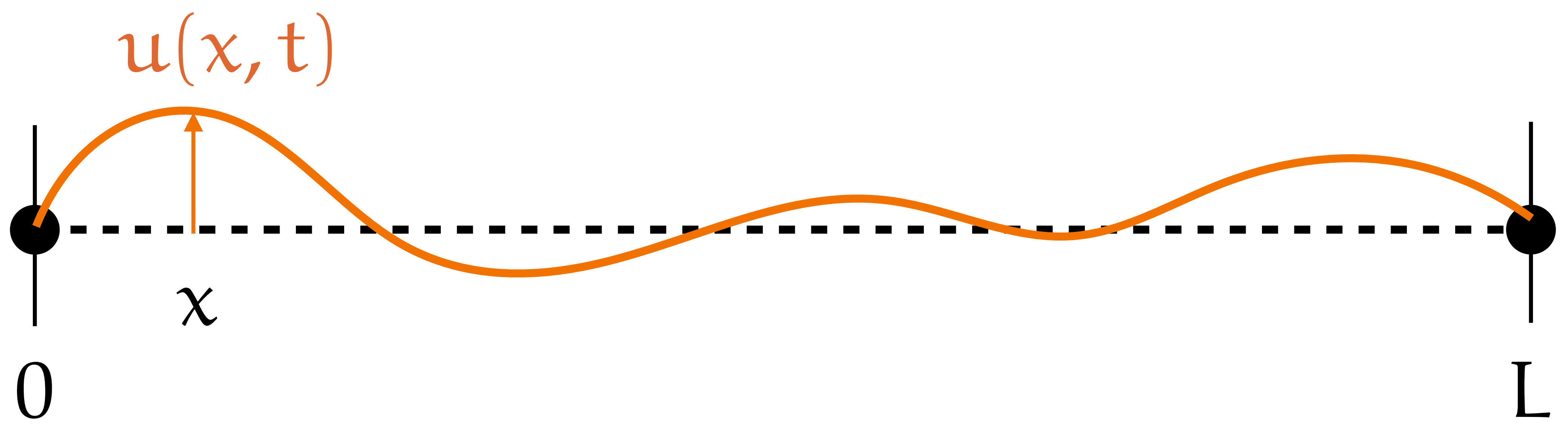
Wenn a sehr klein ist : $\dfrac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a} \approx (\partial_x u)(x,t)$

"Infinitesimale Variation" von u …

Wenn a sehr klein ist : $$\frac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a} \approx (\partial_x u)(x,t)$$ *… in die horizontale Richtung*

Wenn i sehr klein ist : $$\frac{u(x,t+i)-u(x,t)}{i} \approx (\partial_t u)(x,t)$$ *… in die "Zeit-Richtung"*

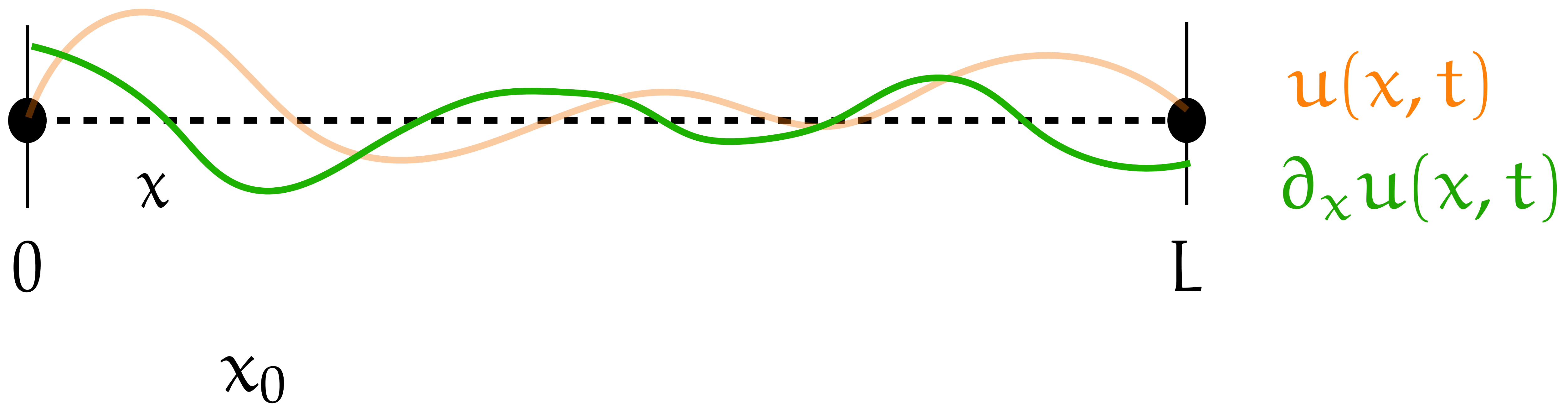
Interpretation auf der Saite:



$\partial_x u(x,t)$ = Steigung der Saite an Position x, Zeit t

$\partial_t u(x,t)$ = Geschwindigkeit an Position x, Zeit t

$\partial_x u$ und $\partial_t u$ sind auch Funktionen von (x,t) …



$\partial_x u(x,t) > 0$
Profil steigt
(in die Richtung —>)

$\partial_x u(x,t) = 0$
Profil bleibt ~konstant
(lokale Min, Max, …)

$\partial_x u(x,t) < 0$
Profil fällt
(in die Richtung —>)

Man kann ihnen die Operationen ∂_x und ∂_t nochmal anwenden …

… dann kann man ihnen die Operationen ∂_x und ∂_t nochmal anwenden …

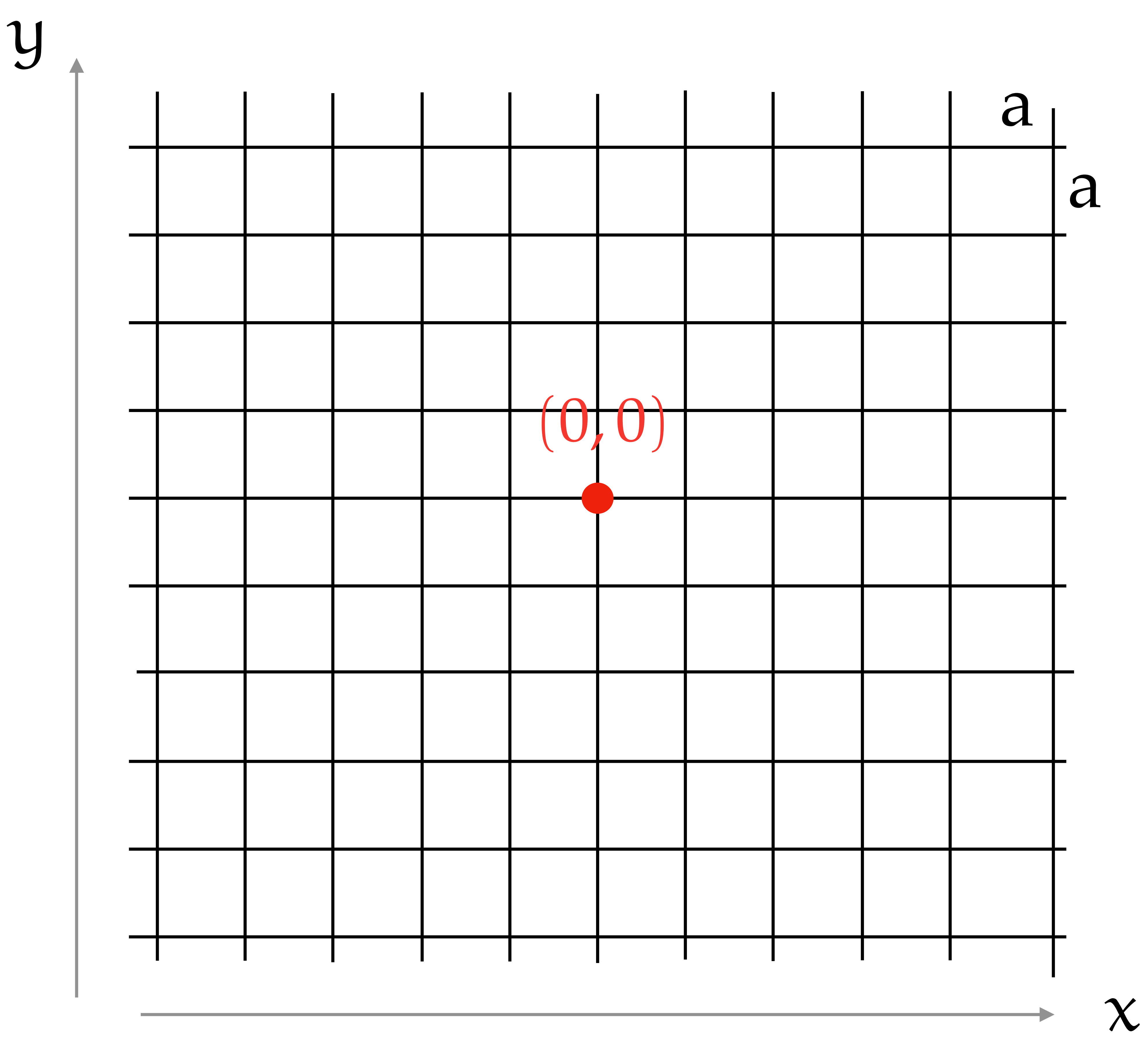
$$\partial_x(\partial_x u)(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) \quad = \text{Krümmung an Position } x\text{, Zeit } t$$

$$\partial_t(\partial_t u)(x,t) = \partial_t^2 u(x,t) \quad = \text{Beschleunigung an Position } x\text{, Zeit } t$$

Die d'Alembertsche Gleichung $\partial_x^2 u(x,t) - c^2 \partial_t u(x,t) = 0$ ausdrückt:

je größer die Krümmung an einem Punkt der Saite, desto größer die Beschleunigung dieses Punktes

Einblick in eine Modellierung

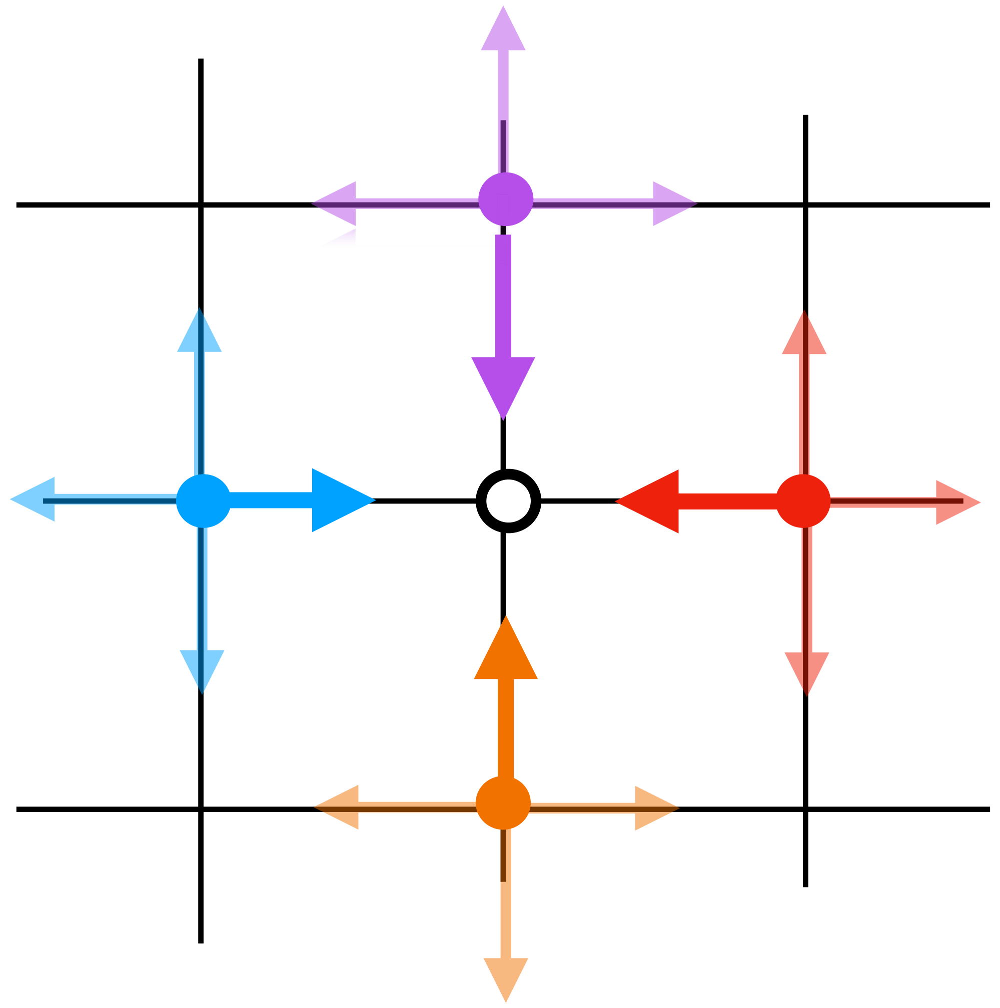


Zeit $t = 0$ $\quad$ N_0 Touristen in Punkt (0,0)

Zwischen Zeit t *und* $t + i$

Jede Person wählt eine der 4 Richtungen (unabhängig von einander) und läuft a=50m

Wieviel Touristen $N(x, y, t)$ *erwartet man in Punkt (x,t) nach Zeit t ?*



$$N(x, y, t+i) = \frac{1}{4}N(x+a, y, t) + \frac{1}{4}N(x-a, y, t) + \frac{1}{4}N(x, y+a, t) + \frac{1}{4}N(x, y-a, t)$$

$$N(x,y,t+i) = \frac{1}{4}N(x+a,y,t) + \frac{1}{4}N(x-a,y,t) + \frac{1}{4}N(x,y+a,t) + \frac{1}{4}N(x,y-a,t)$$

Von ferne (a sehr klein) und in Zeitraffer (i sehr klein) angeschaut

$$N(x \pm a,y,t) = N(x,y,t) \pm a \cdot \partial_x N(x,y,t) + \frac{a^2}{2} \cdot \partial_x^2 N(x,y,t) + \text{(viel kleiner als } a^2\text{)}$$

$$N(x,y \pm a,t) = N(x,y,t) \pm a \cdot \partial_y N(x,y,t) + \frac{a^2}{2} \cdot \partial_y^2 N(x,y,t) + \text{(viel kleiner als } a^2\text{)}$$

$$N(x,y,t+i) = N(x,y,t) + i \cdot \partial_t N(x,y,t) + \text{(viel kleiner als i)}$$

$$\rightsquigarrow \qquad i \cdot \partial_t N(x,y,t) = \frac{a^2}{4} \cdot \partial_x^2 N(x,y,t) + \frac{a^2}{4} \cdot \partial_y^2 N(x,y,t) + \cdots$$

Von ferne (a sehr klein) und in Zeitraffer (i sehr klein) angeschaut, mit $D = \frac{a^2}{4i}$ festgelegt

Diffusionsgleichung $\partial_t N = D \cdot \Delta N$ wobei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$

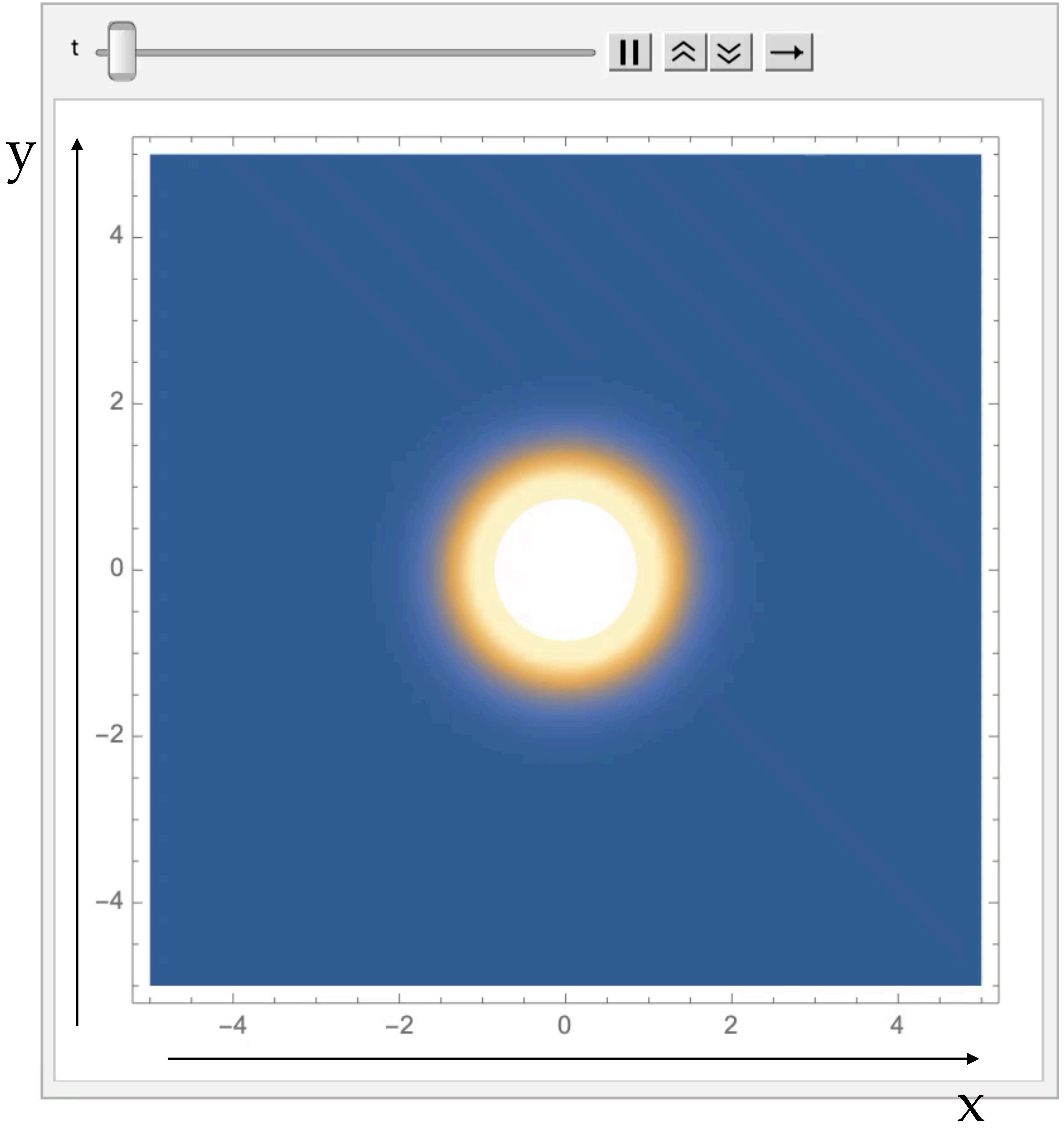
- Genügt dem Superpositionsprinzip

- Qualitative Eigenschaften: Lösungen neigen zur Homogenisierung

- Nach Angabe von $N(x, y, 0)$ existiert eine (explizite) eindeutige Lösung

Animation N(x,y,t)

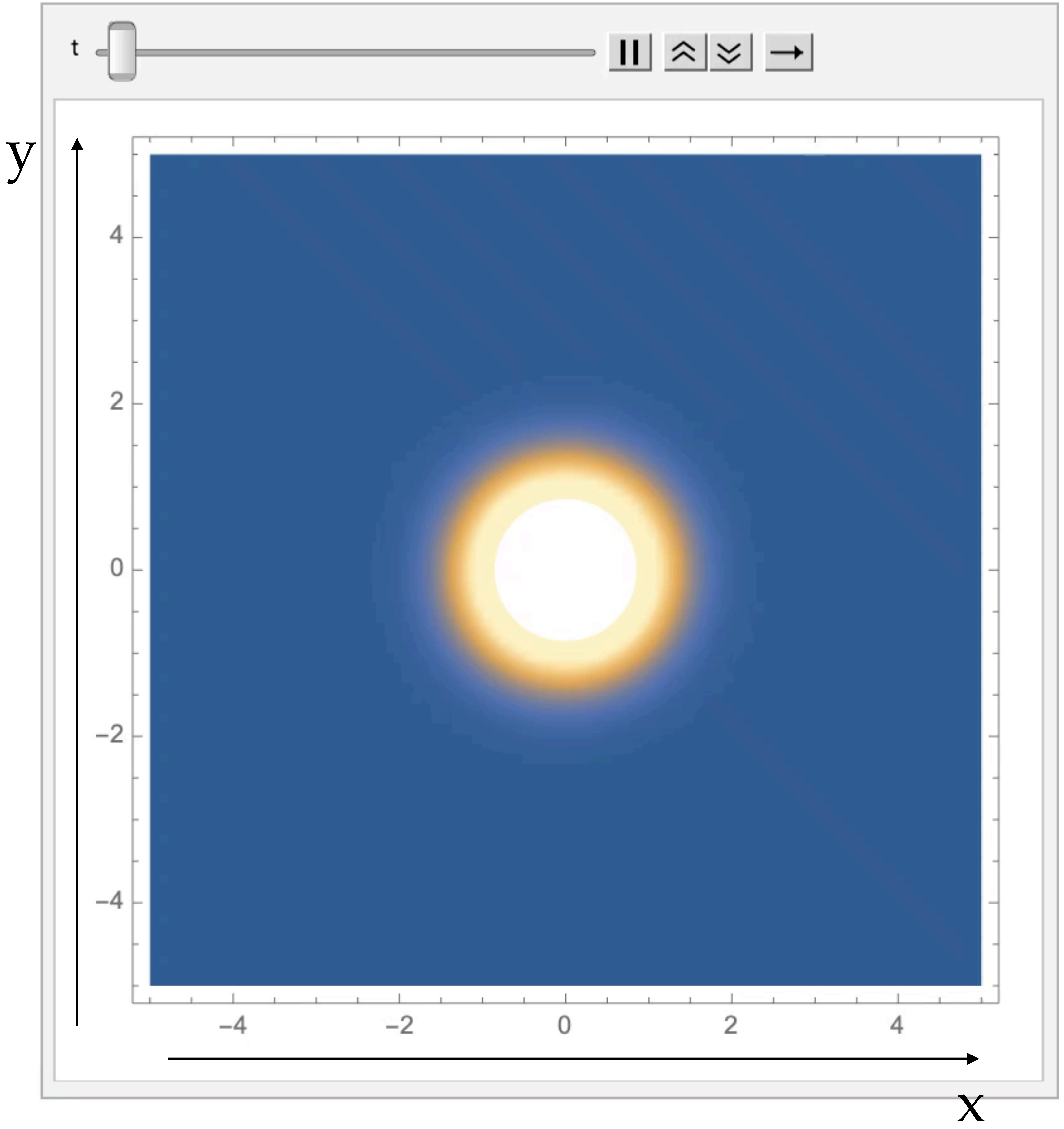
Dichte von Touristen in Punkt (x,y)



(weiss: grosse Anzahl; blau: geringe Anzahl)

Animation N(x,y,t)

Dichte von Touristen in Punkt (x,y)



(weiss: grosse Anzahl; blau: geringe Anzahl)

Die Diffusionsgleichung $\partial_t u = D \cdot \Delta u$

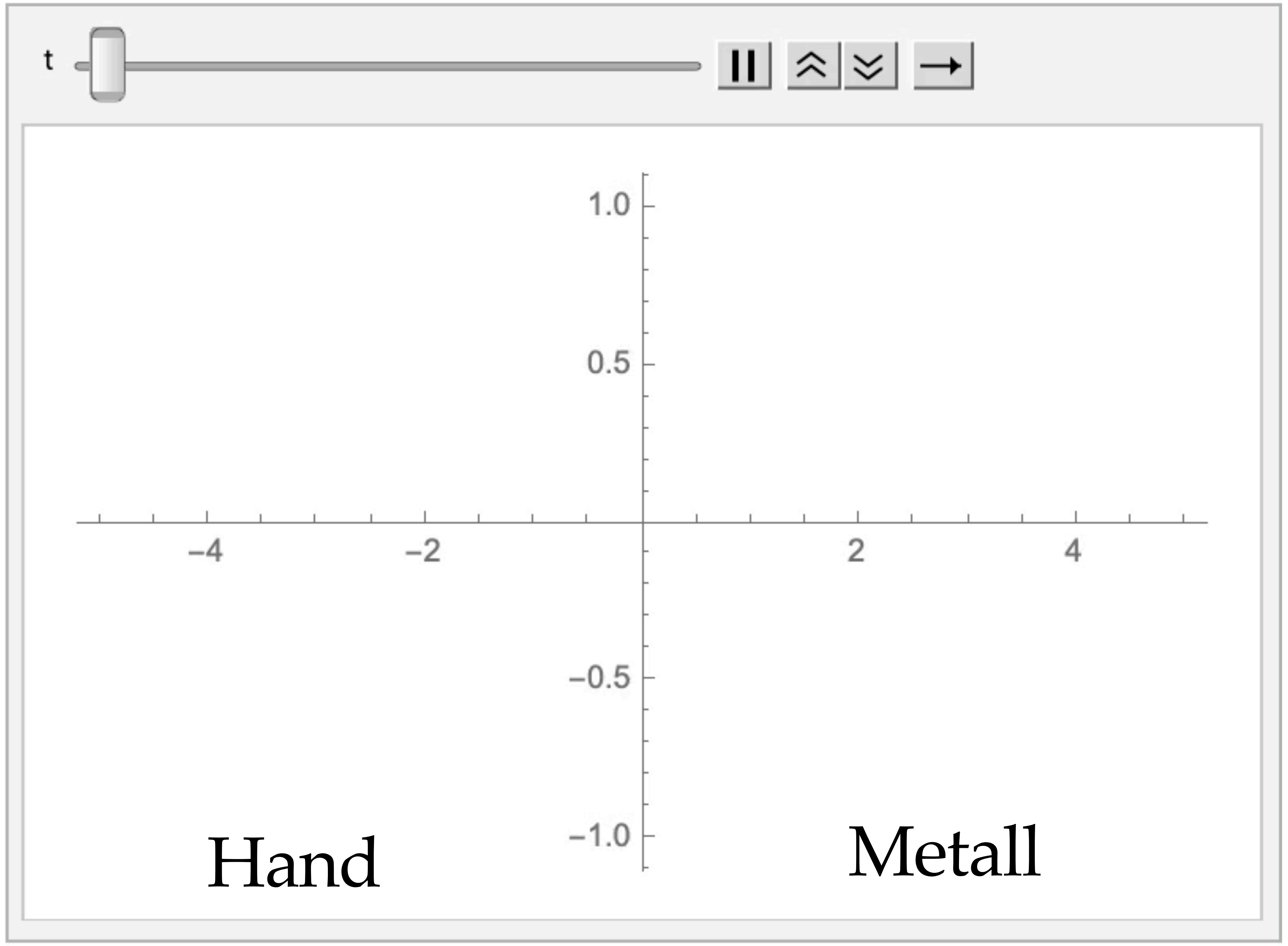
ausdrückt eine lokale Homogenisierung von u mit der Zeit

Sie beschreibt auch

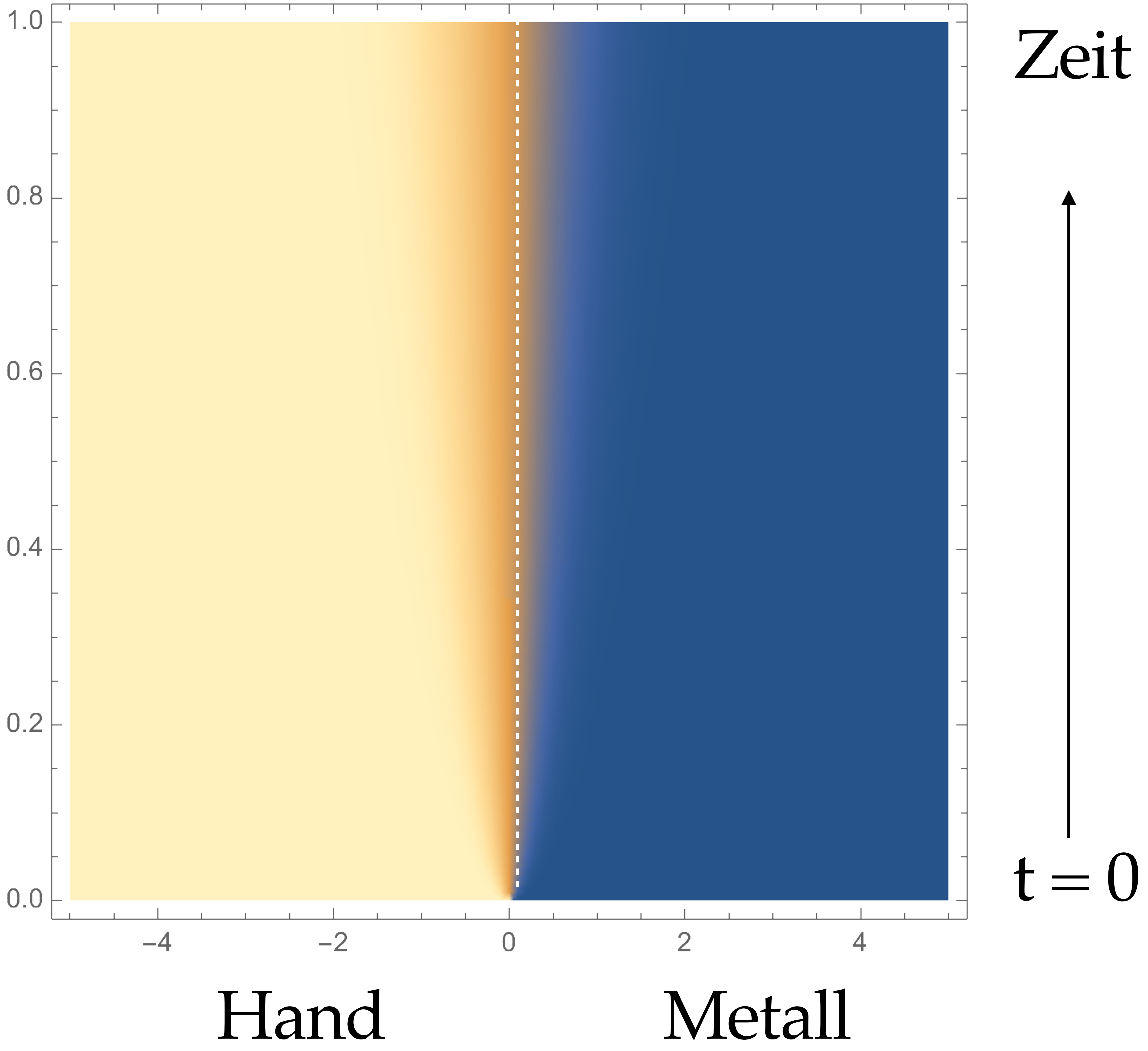
- Hitzeleitung : $u =$ Temperatur
- Ausbreitung von Meinungen / falschen Nachrichten / Viren (am Anfang der Epidemie)
- Bewegung von Pollenteilchen in der Luft (Brownsche Bewegung)

Partielle Differentialgleichungen ausdrücken lokale Prinzipien

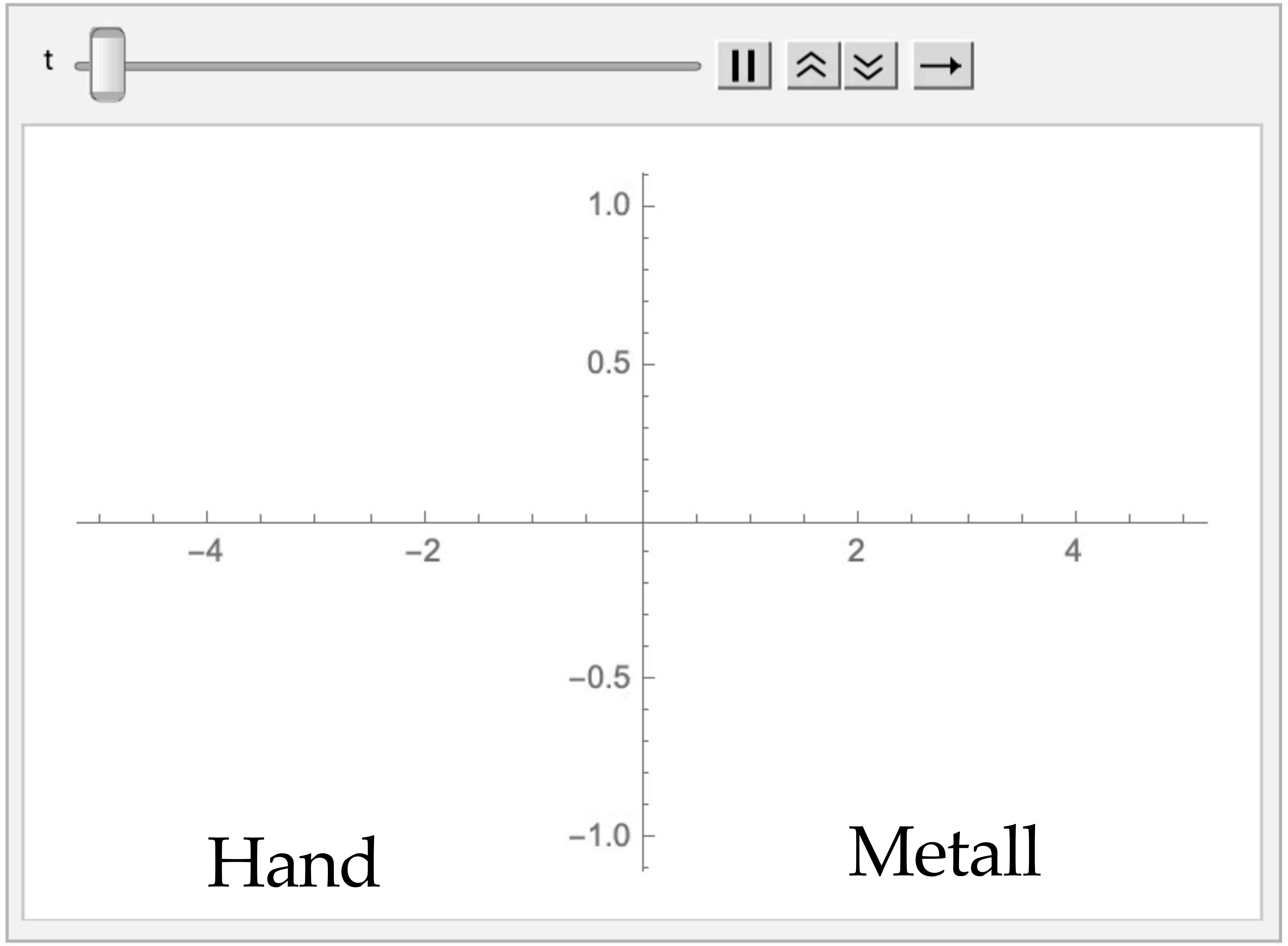
Temperatur u(t) zwischen Hand (links: warm) und Metalfläche (blau: kalt)



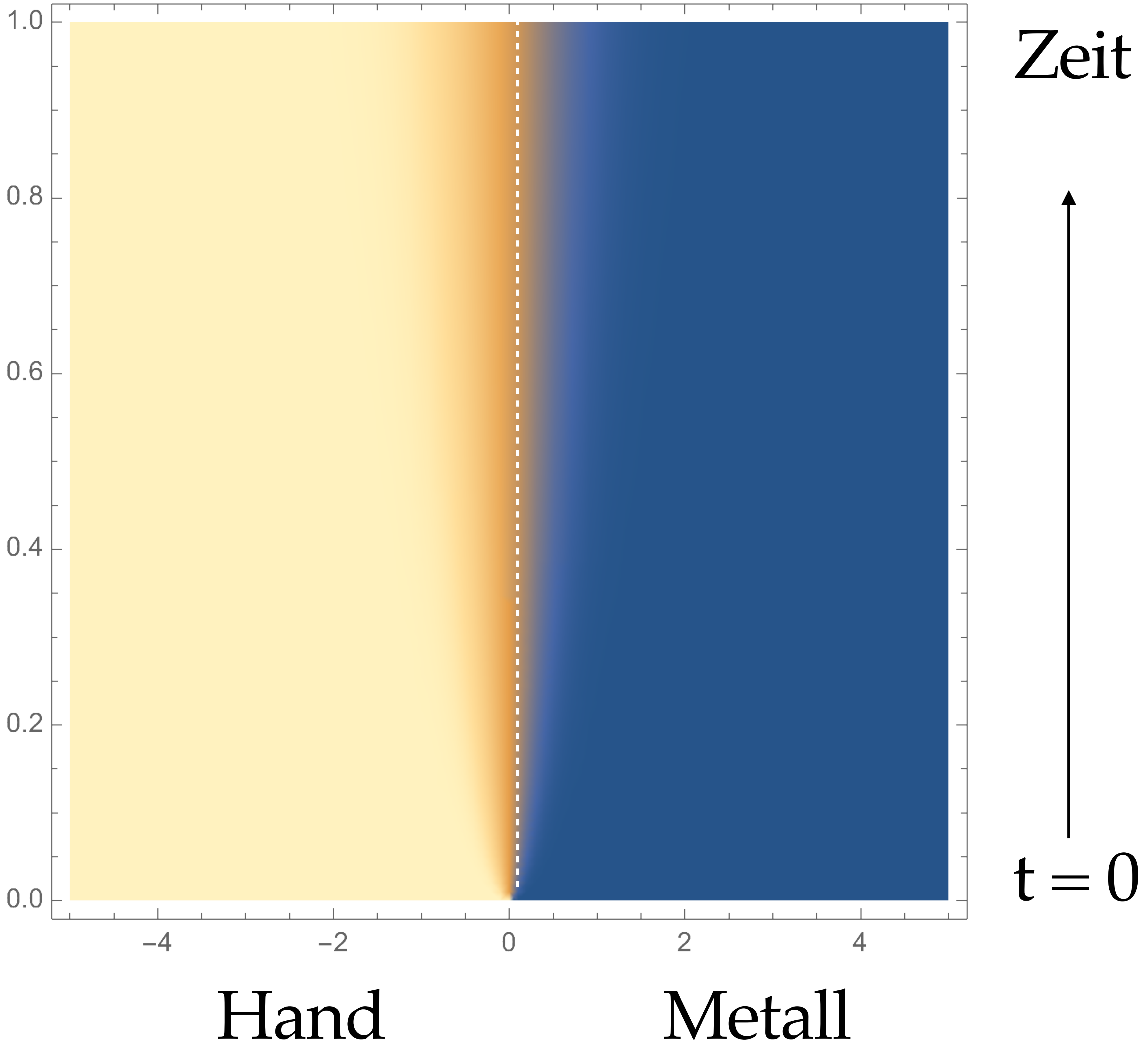
Animation u(t)



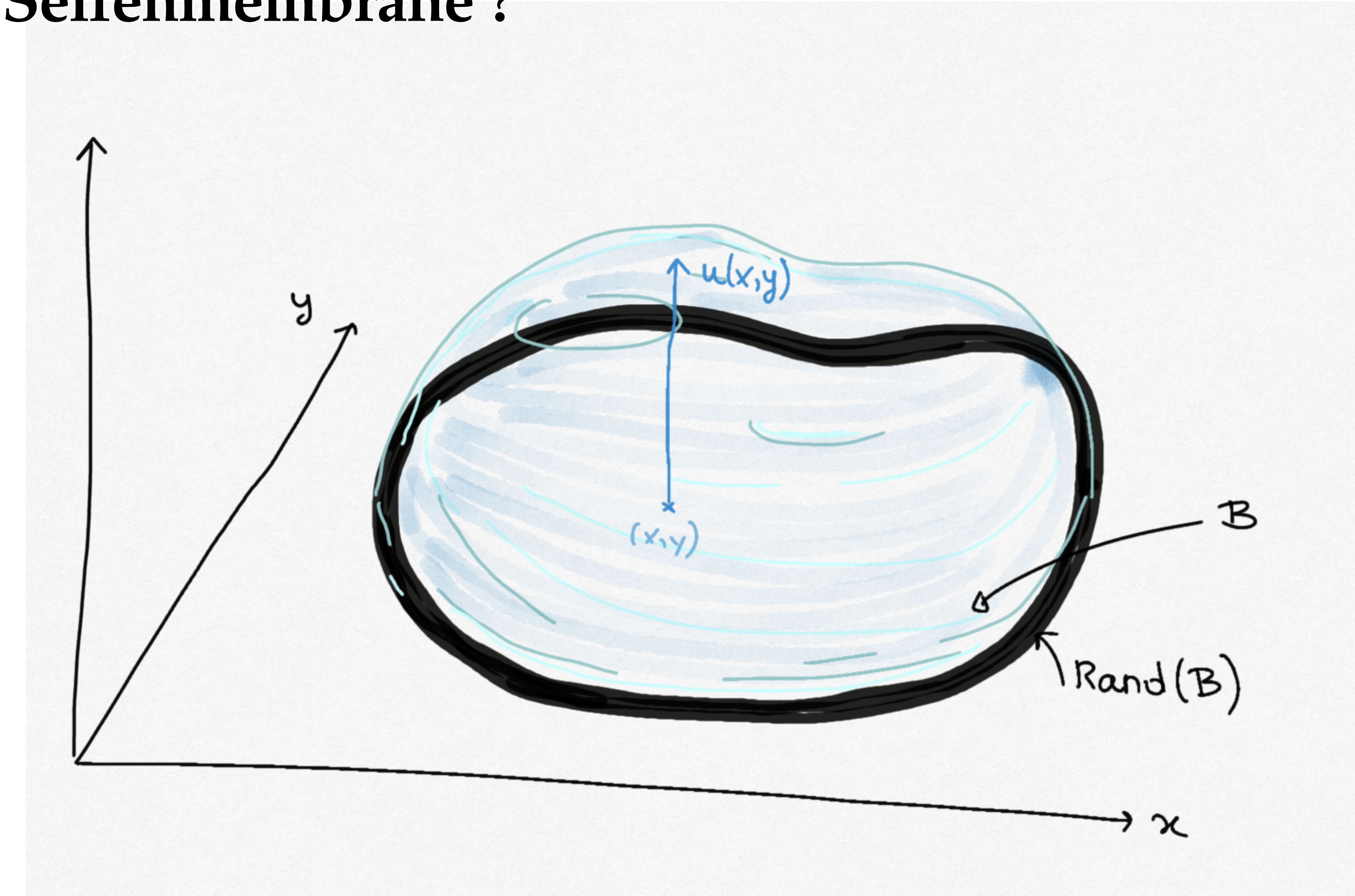
Temperatur u(t) zwischen Hand (links: warm) und Metalfläche (blau: kalt)



Animation u(t)



Was ist der Form einer Seifenblase oder Seifenmembrane ?



$u(x,y)$ = Profilfunktion

$\mathcal{F}[u]$ = Flächeninhalt soll minimal sein

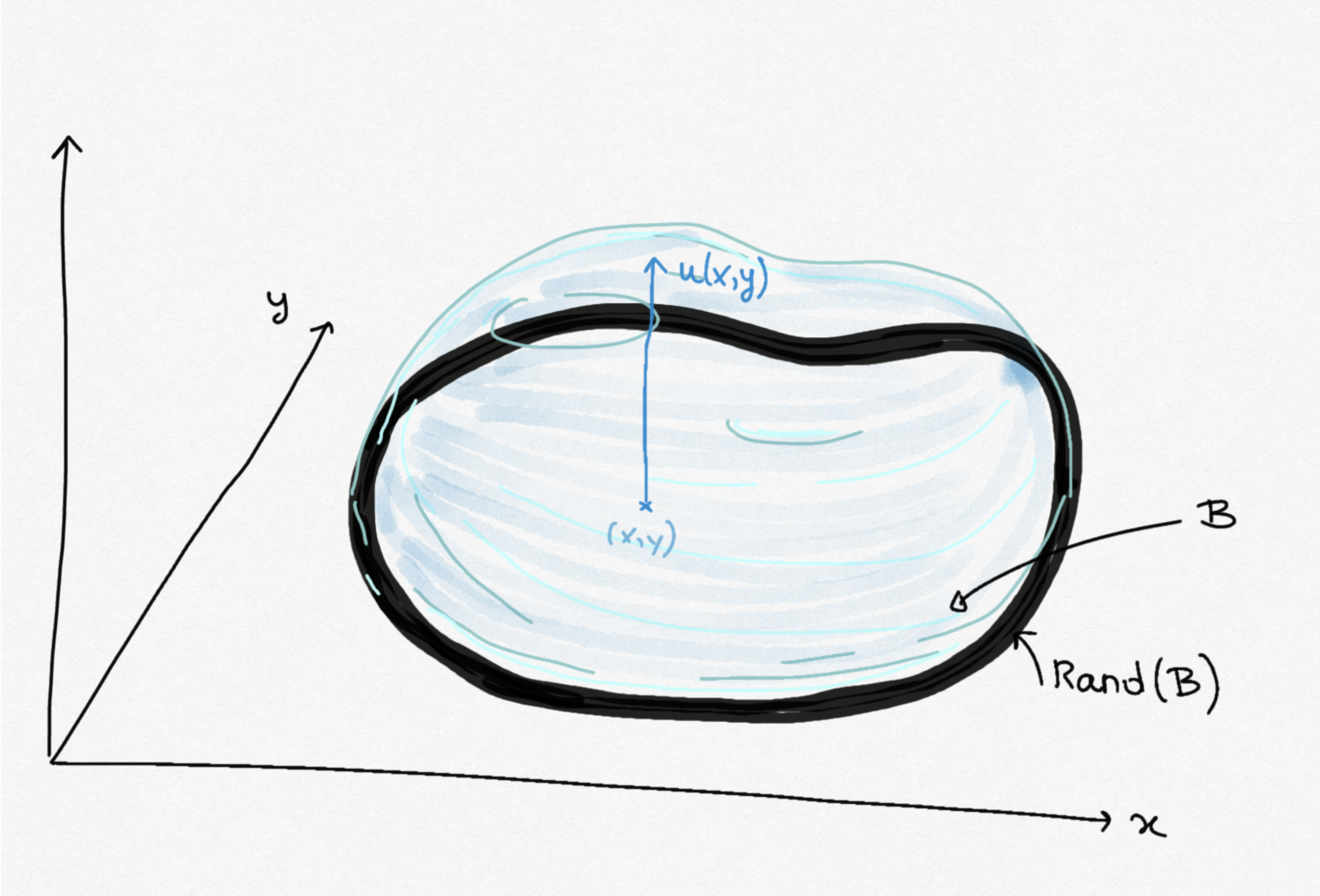
unter allen festgelegten Bedingungen

Optimierungsproblem

$$\Longrightarrow \text{“}\partial_{u(x,y)}\mathcal{F}[u] = 0\text{“}$$

in alle möglichen Deformationsrichtungen

Partial Differentialgleichung können auch als lokale Konsequenz eines (globales) Prinzip, entstehen



$\mathcal{F}[u]$ = (Flächeninhalt des Profils u) ist minimal

$$\iff \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{für alle (x,y) in B} \\ u(x,y) = r(x,y) & \text{für alle (x,y) auf Rand(B)} \end{cases}$$

Theorem Für “vernünftige” B und r

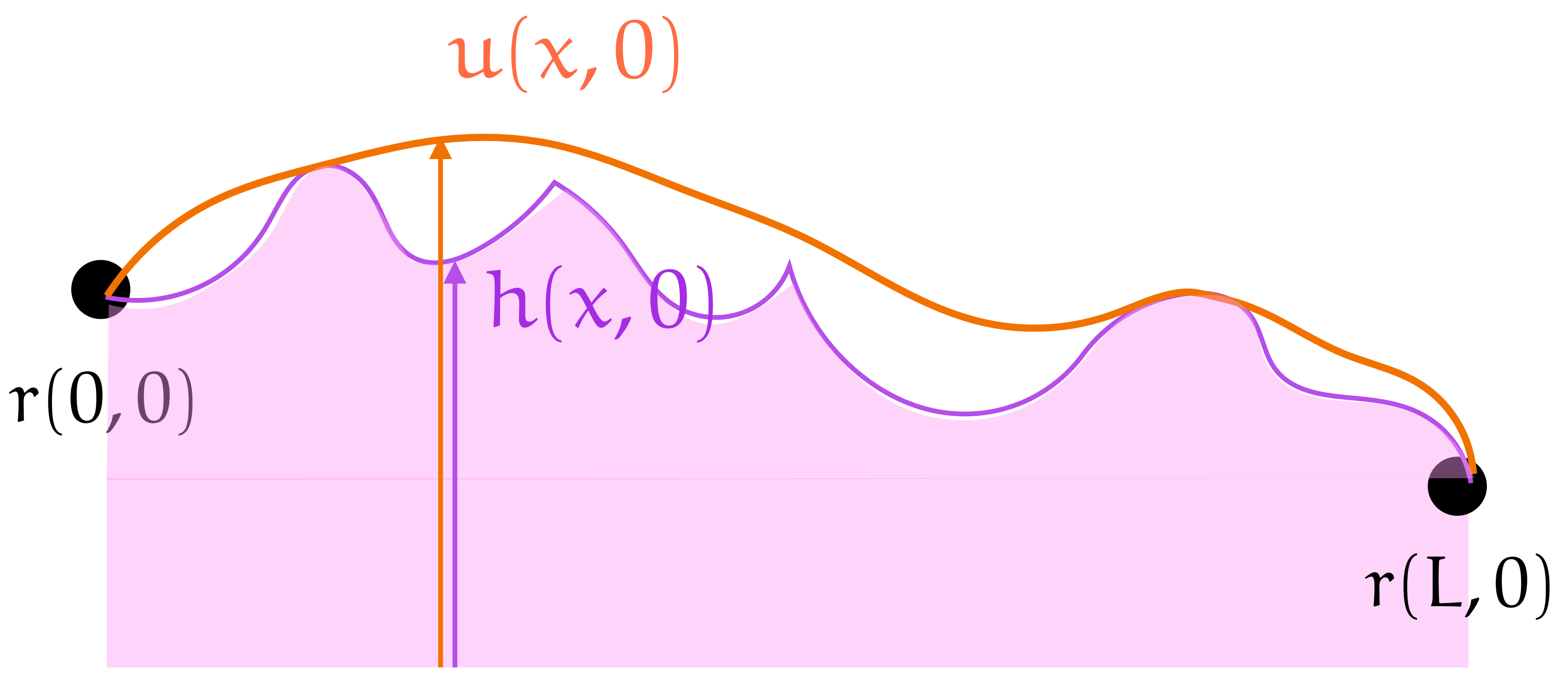
Diese Gleichung besitzt eine eindeutige Lösung, (aber es gibt keine explizite Formel für die Lösung)

Hindernisproblem

Was passiert, wenn die Membran über ein bestimmtes Hindernis (Profil: h(x,y)) liegen muss?

Wir suchen ein Profil u(x,y), sodass

$$\begin{cases} \mathcal{F}[u] \quad \text{minimal ist} \\ u(x,y) = r(x,y) \quad \text{für alle (x,y) auf Rand(B)} \\ u(x,y) \geqslant h(x,y) \quad \text{für alle (x,y) in B} \end{cases}$$



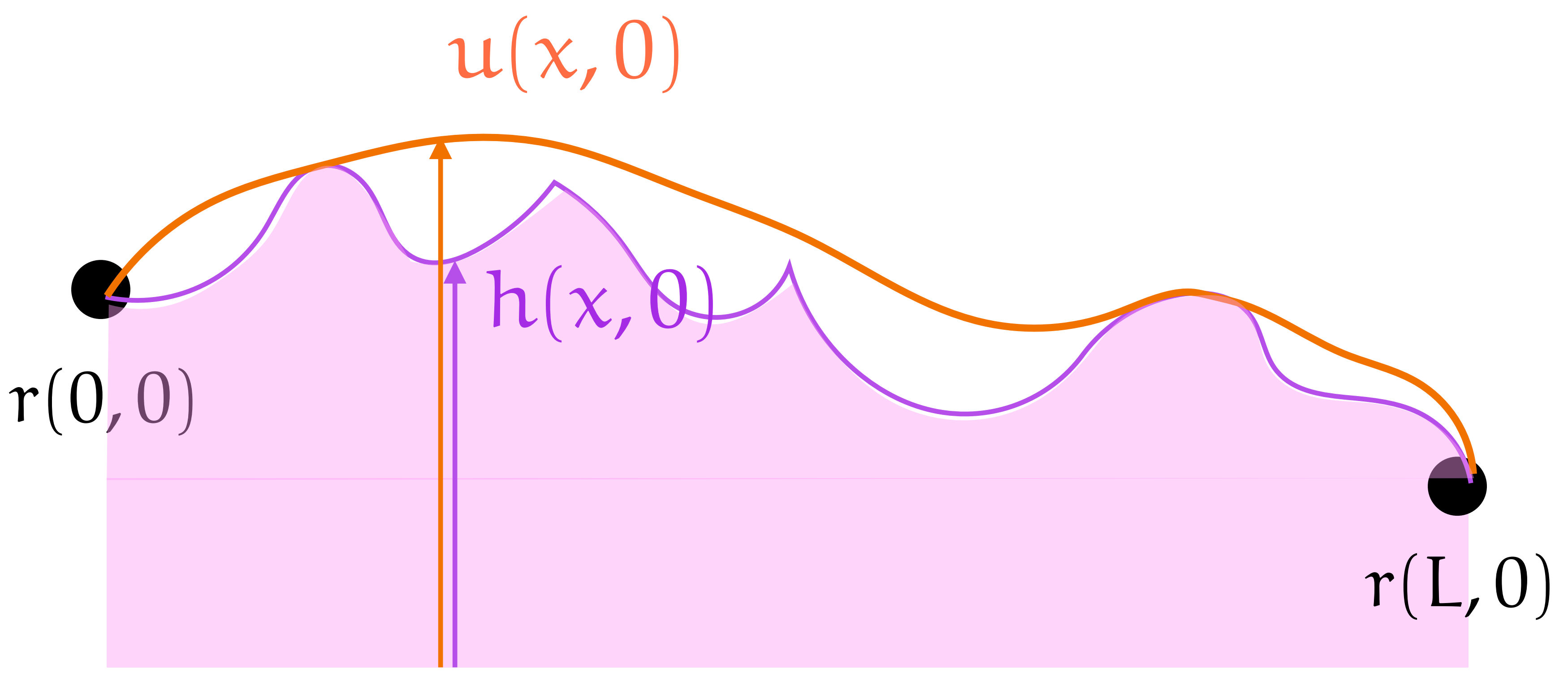
y = 0 Schnitte

Variationsmethoden zeigen

$$\begin{cases} \mathcal{F}[u] \ \text{ ist minimal} \\ u(x,y) \geqslant h(x,y) \quad \text{für alle (x,y) in B} \\ u(x,y) = r(x,y) \quad \text{für alle (x,y) auf Rand(B)} \end{cases}$$

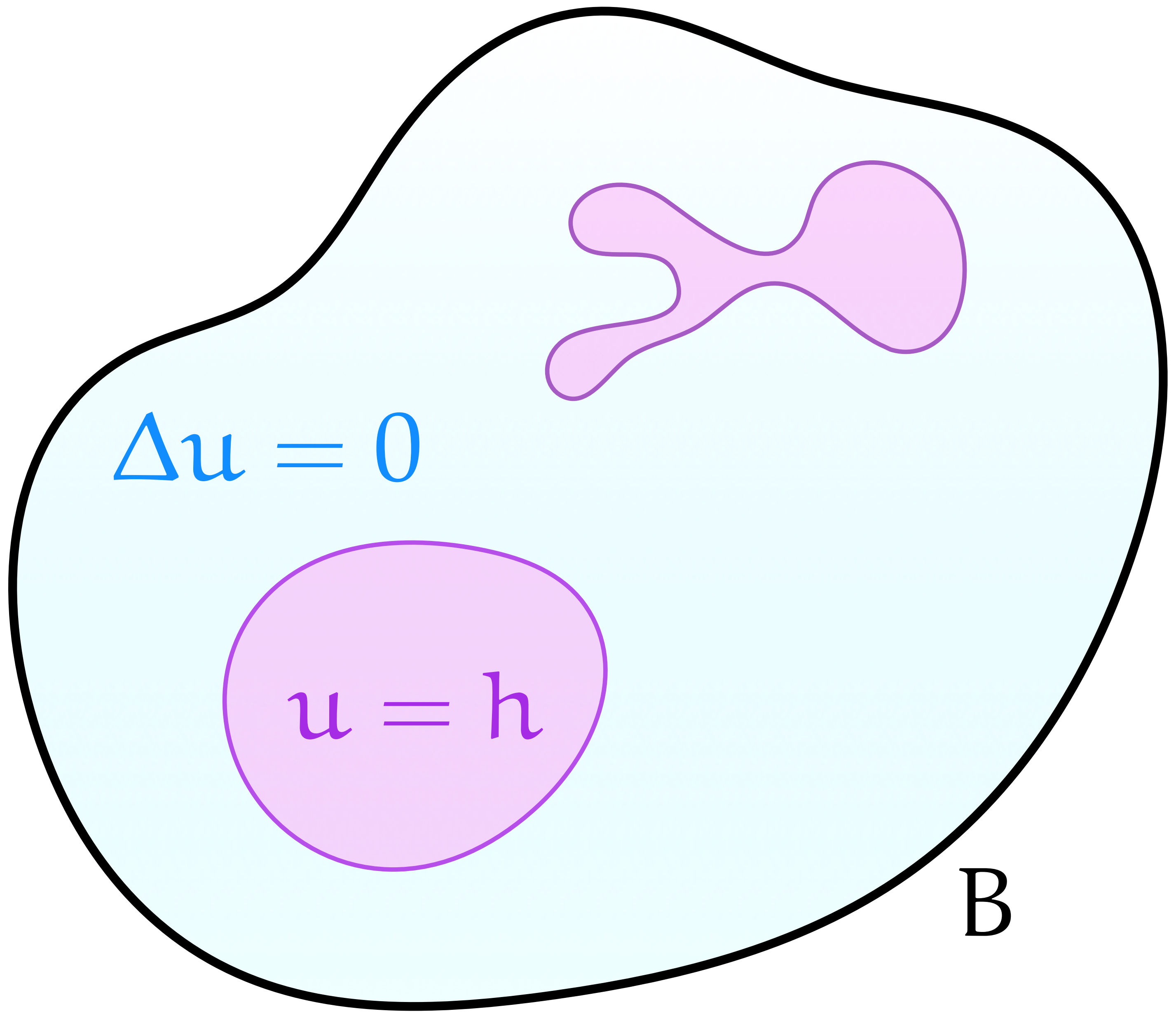
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) \leqslant 0 \quad \text{für alle (x,y) in B} \\ u(x,y) \geqslant h(x,y) \\ \Delta u(x,y) = 0 \quad \text{falls} \ \ u(x,y) > h(x,y) \\ u(x,y) = r(x,y) \quad \text{für alle (x,y) auf Rand(B)} \end{cases}$$



$y = 0$ Schnitte

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) \leqslant 0 & \text{für alle (x,y) in B} \\ u(x,y) \geqslant h(x,y) & \\ \Delta u(x,y) = 0 & \text{falls } u(x,y) > h(x,y) \\ u(x,y) = r(x,y) & \text{für alle (x,y) auf Rand(B)} \end{cases}$$



von oben gesehen

Zwei Unbekannten: Profil u(x,y) und **Kontaktgebiet**

$\rightsquigarrow$ *"Freies Randwertsproblem"*

Reformulierung: $\min(-\Delta u(x,y), u(x,y) - h(x,y)) = 0$ für alle (x,y) in B

$\rightsquigarrow$ *Nichtlineare partielle Differentialgleichung (kein Superpositionsprinzip)*

Überblickspause

Viele Phänomenen lassen sich *nur in erster Approximation* durch lineare pD beschreiben.

Nichtlineare pD sind oft realistichere Modelle

- große Saitenschwingungen
- Optimierung der Flächeninhalt mit grosser Krümmung,
- Saturation in Virenausbreitung
- endliche Ressourcen

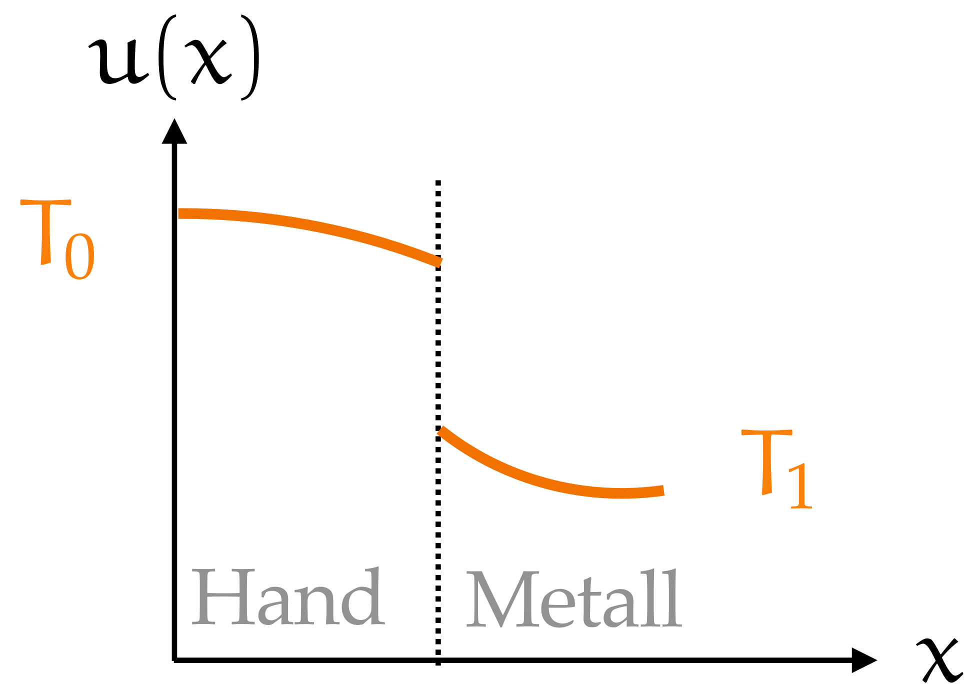
Beispiele von freien Randwertsproblemen:
- Phasen-Übergang
- Position der Oberfläche eines Flüssigkeit
- Brandausbreitung

Oft kann man keine explizite Formel für Lösungen finden
Na dann … Auf welche Fragen kann man eine Antwort hoffen?

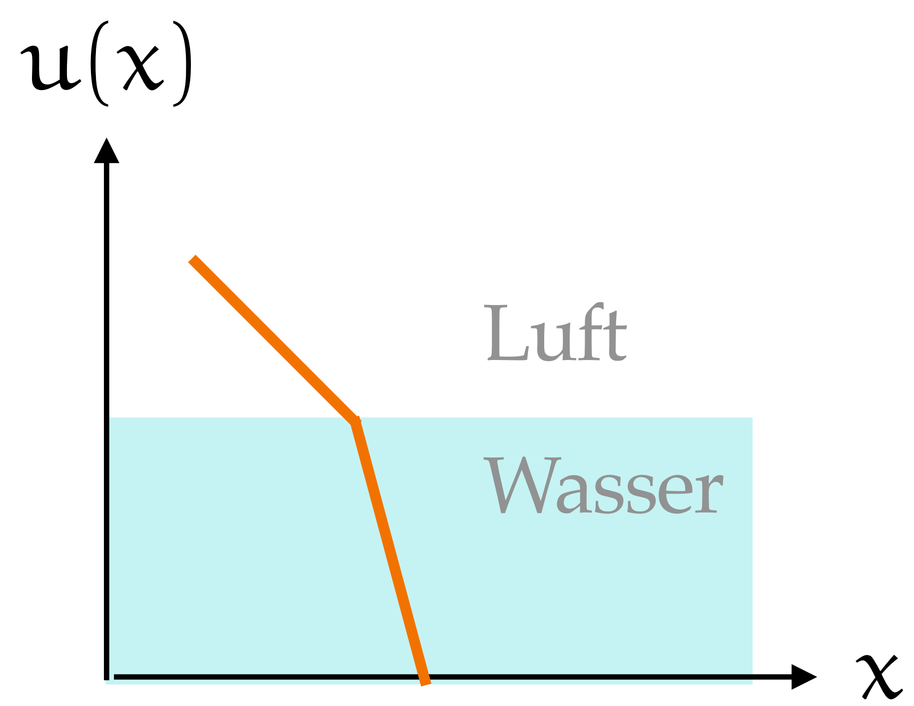
Luis Caffarelli und viele andere haben sich um die Regularität von Lösungen befasst

Beispiel von Fragestellung:
- *haben Seifenblasen Kanten ?*
- *dürfen die Kontaktgebiete in dem Hindernisproblem Kanten haben ?*

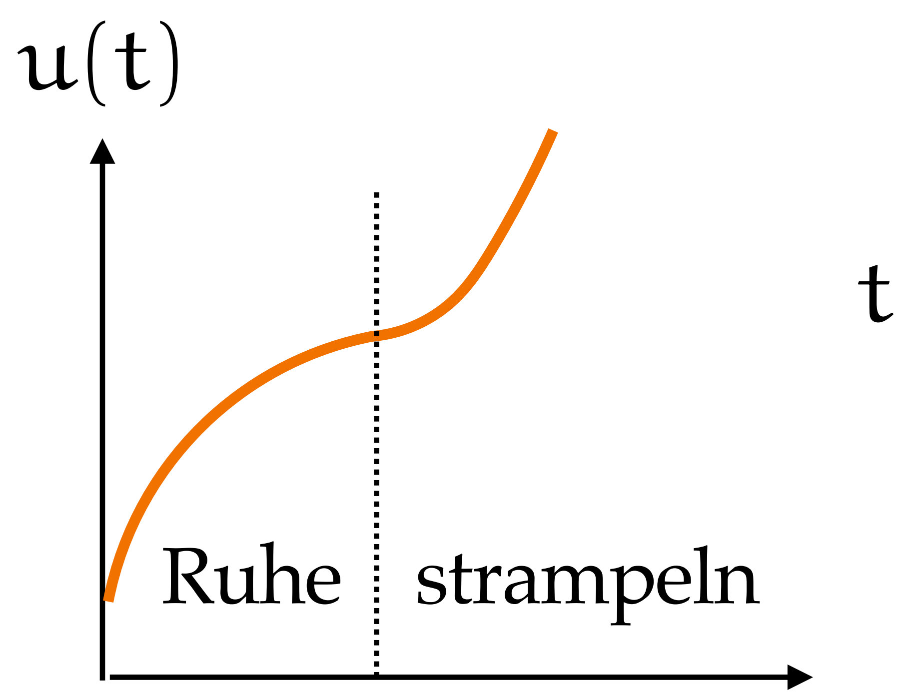
Beispiele von Funktionen mit Singularitäten in dem Alltagsleben



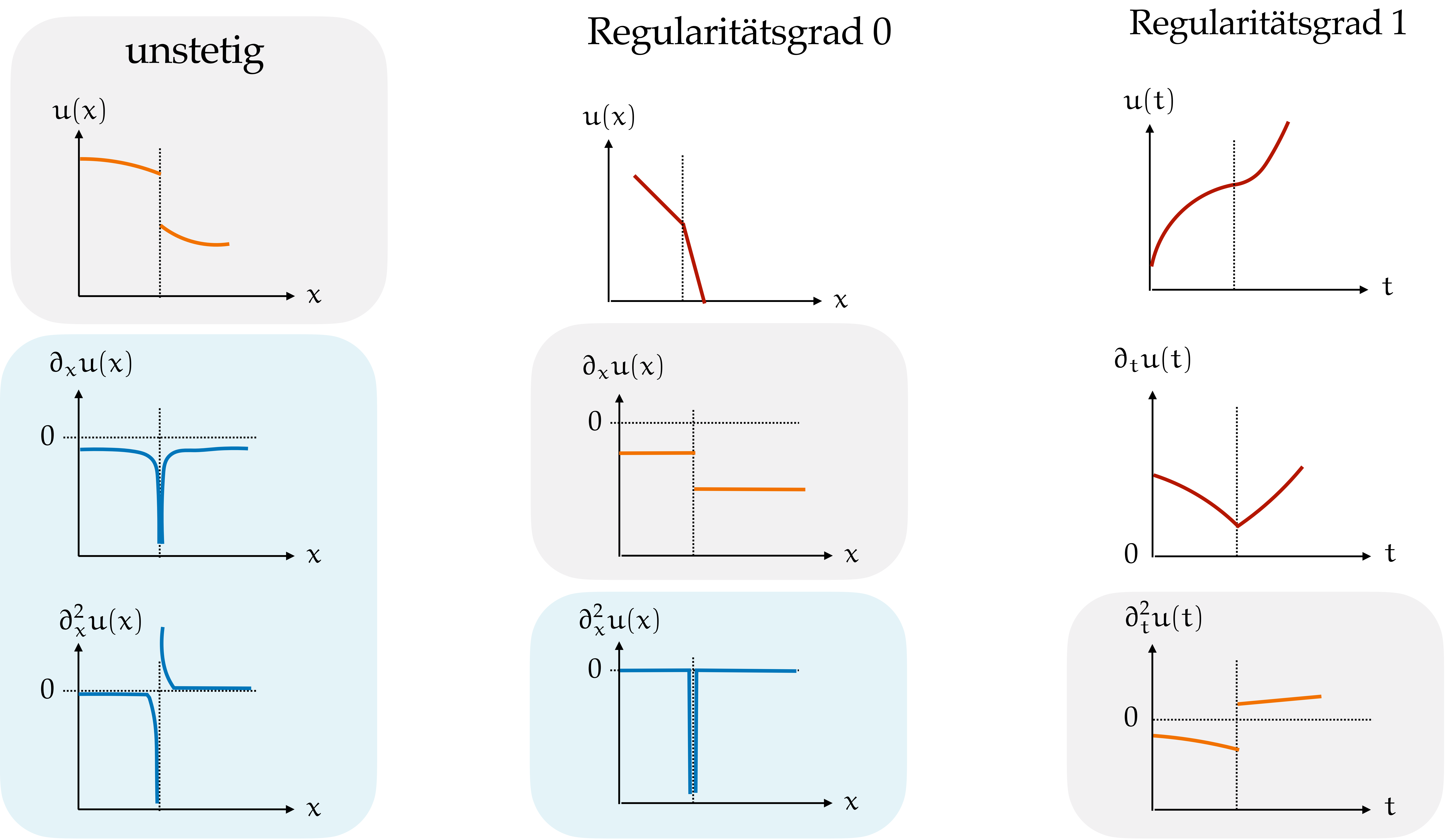
Temperatur



Laufbahn eines Lichtstrahles



Position eines Fahrrades


unstetig
Regularitätsgrad 0
Regularitätsgrad 1
u(x)
x
u(x)
x
u(t)
t
∂ₓu(x)
0
x
∂ₓu(x)
0
x
∂ₜu(t)
0
t
∂ₓ²u(x)
0
x
∂ₓ²u(x)
0
x
∂ₜ²u(t)
0
t

Eine Funktion $u(x)$ hat Regularitätsgrad k, wenn $\underbrace{\partial_x \cdots \partial_x}_{\text{k mal}} u(x)$ stetig ist

Regularitätstheorem

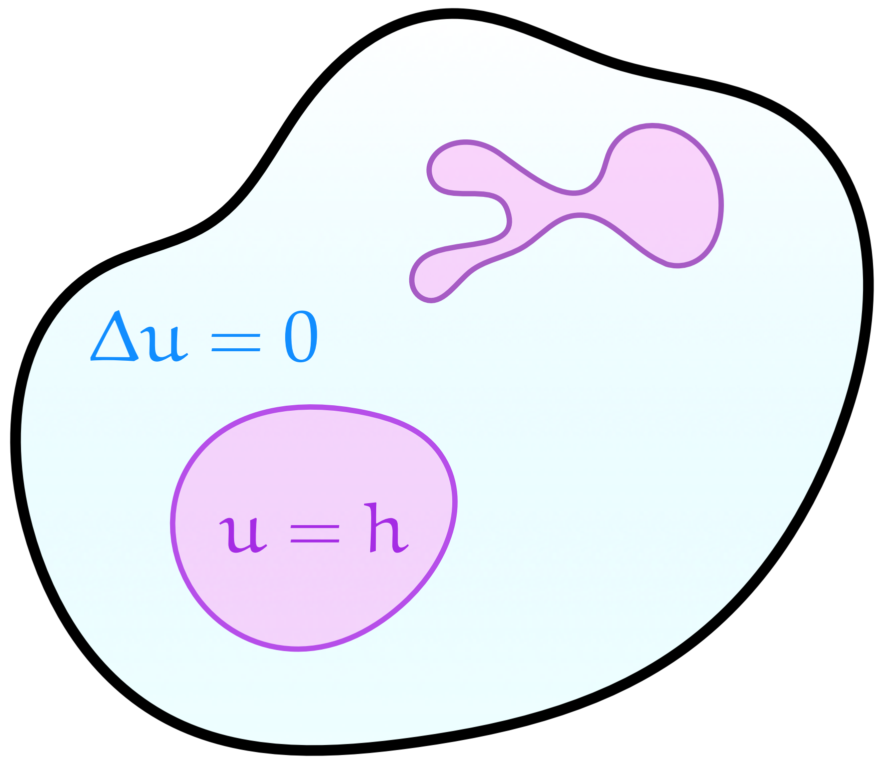
Lösungen von $\Delta u = 0$ (am Rand festgehalten) haben beliebig grossen Regularitätsgrad k

19. Hilbertsche Problem (1900):
Gilt das noch für allgemeinere (aber ähnliche) partielle Differenzialgleichungen ?

Ja: Ennio de Giorgi, John Nash, Jürgen Moser (1955-1960)

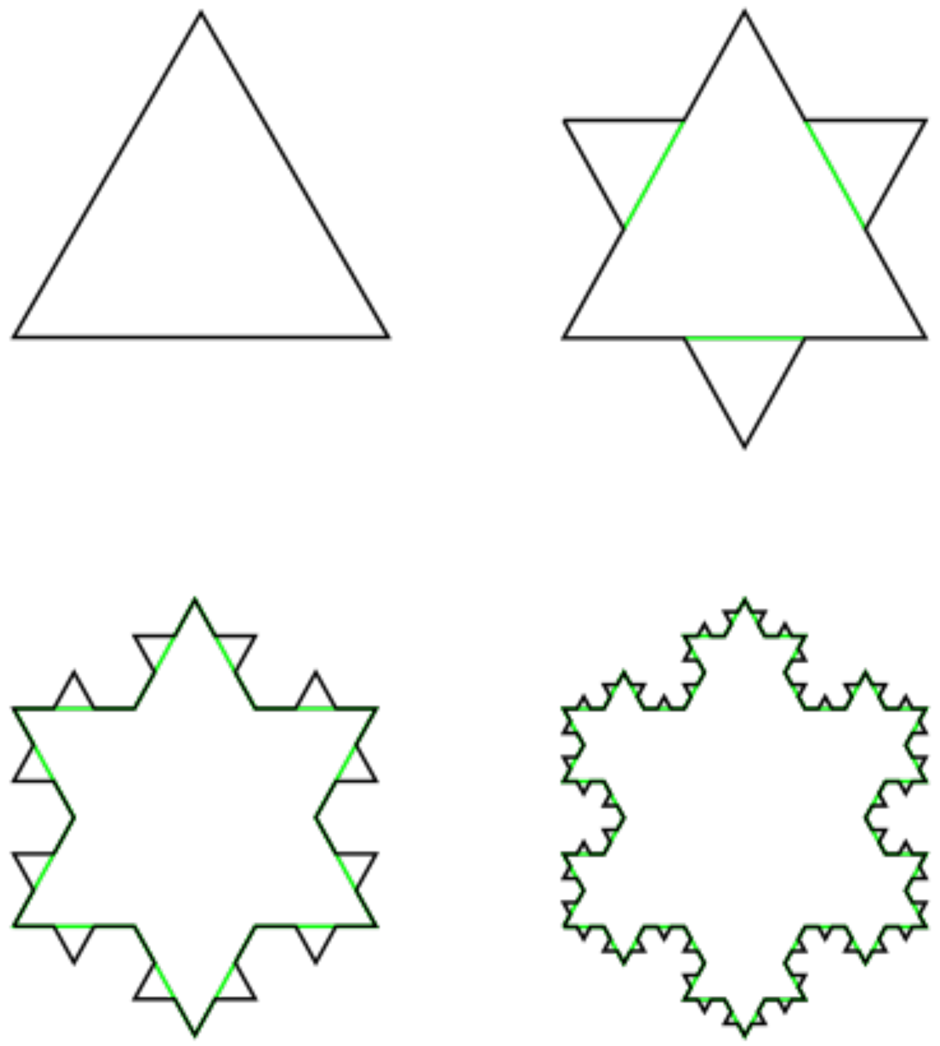
Zurück zum Hindernisproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) \leqslant 0 & \text{für alle (x,y) in B} \\ u(x,y) \geqslant h(x,y) & \\ \Delta u(x,y) = 0 & \text{falls } u(x,y) > h(x,y) \\ u(x,y) = r(x,y) & \text{für alle (x,y) auf Rand(B)} \end{cases}$$



Sehr unebene Kontaktgebiete sind vorstellbar

(Kochsche Schneeflocken hat überall Kanten ! — Bild aus Wikipedia)



Caffarelli und viele andere haben ausreichende (weiche) Bedingungen gegeben (auf B, r, h) die bestimmte Regularitätsgrade für die Grenze der Kontaktgebiete gewährleisten

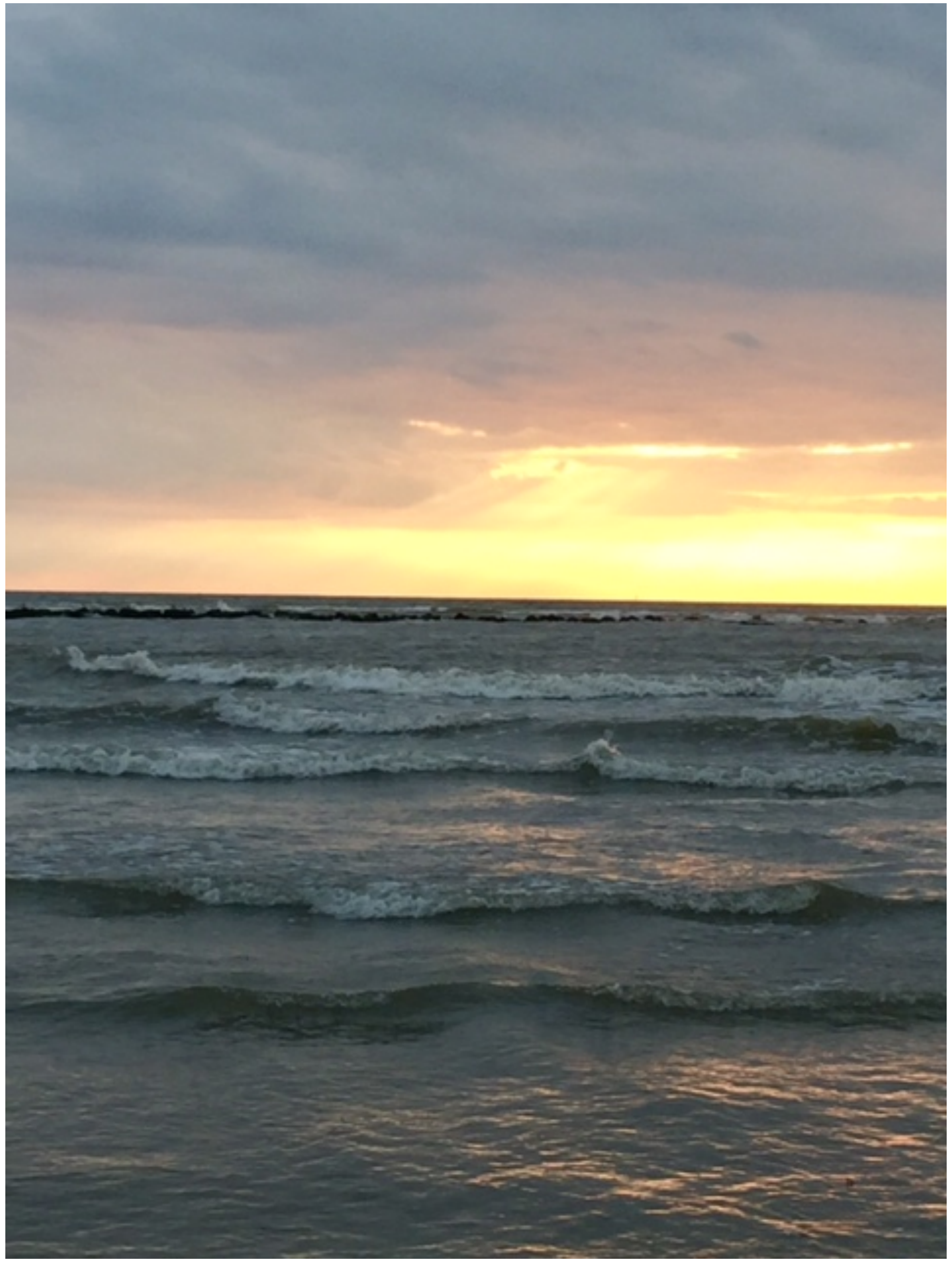
Die **Navier-Stokes-Gleichungen** beschreiben die Dynamik einer Flüssigkeit (Atmosphäre, Ozean, Wasser im Glas, Metalle in flüssigem Erdkern, usw.)

System von 3 nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für

$$u(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} u_x(x,y,z,t) \\ u_y(x,y,z,t) \\ u_z(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit des Flüsses an Position (x,y,z) und Zeit t

Clay-Millenium Problem (offen)
Existenz und Eindeutigkeit von (singularitätsfreien?) Lösungen für gegebene Initialbedingung $u(x,y,z,0)$



Für Flüssigkeit mit konstanter Dichte :

$$\partial_t u_i = D \cdot \underbrace{\Delta u_i}_{\text{Zähigkeit, Reibung, ... (Homogenisierung)}} + \underbrace{\nabla_u u_i}_{\text{Transport}} \underbrace{- \partial_i P}_{\text{Druckkräfte}} + \underbrace{K_i}_{\text{Externe Kräfte}}$$

(gegeben)

wobei $(\nabla_u u)_i = u_x \partial_x u_i + u_y \partial_y u_i + u_z \partial_z u_i$

$i =$ jede der 3 Richtungen (x, oder y, oder z)