

5. Übungsblatt zur Einführung in die Quantenfeldtheorie II SS 2011

Abgabe am 20.6.11 nach der Vorlesung, Besprechung in den Übungen am 22.6.11.

Prof. Dr. Matthias Staudacher

Ü 5.1: Divergenzgrad und Renormierbarkeit

a) Betrachten Sie die Verallgemeinerung der Lagrangedichte der sogenannten Fermi-Theorie auf D Dimensionen:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + G (\bar{\psi}\psi)^2 .$$

Berechnen Sie den Divergenzgrad von Feynman-Diagrammen mit F_E externen Fermionlinien als Funktion von D , F_E , und der Anzahl der Vertizes V des Diagrammes. Erklären Sie in welchen Dimensionen diese Theorie perturbativ renormierbar ist.

b) Betrachten Sie skalare Feldtheorie mit einem allgemeinen Potential in D Dimensionen:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{g_n}{n!}\phi^n .$$

Berechnen Sie wieder den Divergenzgrad eines Feynman-Diagrammes mit B_E externen Bosonlinien als Funktion von D , B_E , und der Anzahl der Vertizes V_n mit Koordinationszahl n des Diagrammes. Analysieren Sie, abhängig von der Raumzeitdimension D , welche Potentiale (also welche nichtverschwindenden Kopplungskonstanten g_n) „erlaubt“ sind, damit die Theorie perturbativ renormierbar ist.

Ü 5.2: Weisskopf Phänomen

Betrachten Sie das Feynman-Integral

$$I(p, \mu, m) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} .$$

a) Was ist das dazugehörige Feynmandiagramm, und in welchen Quantenfeldtheorien die Sie kennen tritt es auf?

b) Argumentieren Sie, dass das Integral die Struktur $I(p, \mu, m) = A(p^2) \not{p} + B(p^2)$ hat. Was ist der scheinbare Divergenzgrad des Integrals?

c) Bestimmen Sie den divergenten Teil (in Cutoff-Regularisierung) von $A(p^2)$ und $B(p^2)$. Was ist der tatsächliche Divergenzgrad des Integrals?

Ü 5.3: Kleine Feynman-Integraltafel

Betrachten Sie die Familie von Feynman-Integralen

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^{1,D-1}} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + 2p \cdot k - m^2 + i\epsilon)^n}.$$

und

$$I_n^{\mu\nu\rho\sigma\dots} = \int_{\mathbb{R}^{1,D-1}} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma \dots}{(k^2 + 2p \cdot k - m^2 + i\epsilon)^n}.$$

Berechnen Sie in dimensioneller Regularisierung I_n , I_n^μ , $I_n^{\mu\nu}$, $I_n^{\mu\nu\rho}$, und $I_n^{\mu\nu\rho\sigma}$. Überprüfen Sie auch, ob unsere Regeln für die scheinbaren Divergenzgrade dieser Integrale mit den tatsächlichen Divergenzgraden übereinstimmen.

Ü 5.4: QFT in sechs Dimensionen

Betrachten Sie die ϕ^3 -Theorie in $D = 6 - \epsilon$ Dimensionen. Diese Theorie hat die Lagrangendichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - h\phi,$$

mit den Kopplungskonstanten g und h .

Führen Sie die komplette Einschleifenrenormierung dieser Theorie durch. D.h., berechnen Sie die Feldrenormierung, die Massenrenormierung, und die Kopplungskonstantenrenormierung der Theorie zu einer Schleife.