Blatt 1.

Lösungen zu 1, 2 und 3a sind klar.

3b) $f: A \to B$ mit:

(1) $A \subset B$, $A \neq B$.

f kann prinzipiell bijektiv sein, wie wir an dem Bsp sehen:

Bsp: $A = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = B$

$$f: A \to B$$
$$z \mapsto \frac{1}{2} z.$$

Achtung: Sind A und B endliche Mengen, so stimmt dies nicht!

Dann folgt aus $A \subset B$, $A \neq B$ dass

$\# A < \# B$ und damit kann

f ~~werden~~ niemals surjektiv sein (also auch nicht bijektiv!).

(2) A bel. $B := \{c\}$

Entweder ist $A = \emptyset$, dann pathologisch und Frage der Def,

oder $A \neq 0$, dann ist f die konstante Abb. $f: A \to B$, $a \mapsto c$.

Dann ist f injektiv $\Longleftrightarrow \# A = \# B = 1$

f ist immer surjektiv, also ist f bijektiv $\Longleftrightarrow$ f injektiv ist.

(3) $B \subsetneq A$,

f kann niemals injektiv sein, falls B eine endliche Menge ist ~~sind~~, denn dann gilt $\# B < \# A$ und damit muss nach dem Dirichletschen Schubladenprinzip mindestens ein Element in B ein mehrfaches Urbild haben.

falls B unendliche Menge, dann zB $A = \mathbb{Z}$, $B = 2\mathbb{Z}$, $f: A \to B$, $z \mapsto 2z$ bijektiv.

Blatt 1

Aufgabe 3c)

~~Aufgabe 3.~~ Seien X und Y Mengen, f eine Abbildung von X nach Y. Zu jeder Teilmenge $A \subset X$ ist das Bild von A definiert als $f(A) := \{y \in Y \mid \exists\, a \in A \text{ mit } f(a) = y\}$. Für $B \subset Y$ ist das Urbild von B definiert durch $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

(a) **Aufgabe.** Für $A, B \subset Y$ gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Beweis. Man überlegt sich leicht folgende Äquivalenzen:

1.

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A \cap B) \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in A \cap B \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in A \wedge f(x) \in B \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A \cup B) \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in A \cup B \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

□

(b) **Aufgabe.** Für $A, B \subset X$ gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Finde ein Beispiel mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Lösung.

$$\begin{aligned} & y \in f(A \cap B) \\ \Rightarrow\ & \exists\, x \in A \cap B \ :\ y = f(x) \\ \Rightarrow\ & \Big(\exists\, x_1 \in A\ (x_1 := x)\ :\ y = f(x_1)\Big) \wedge \Big(\exists\, x_2 \in B\ (x_2 := x)\ :\ y = f(x_2)\Big) \\ \Rightarrow\ & y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Beispiel mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$:

Es sei $X := \{0,1\}, Y := \{1\}, A := \{0\}, B := \{1\}$ sowie $f := (X, X \times Y, Y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(A) &= Y \\ f(B) &= Y \\ f(A \cap B) &= \varnothing \\ f(A) \cap f(B) &= Y, \end{aligned}$$

also die gewünschte Ungleichung. □

(c) **Aufgabe.** Welche dieser Aussagen sind immer richtig (d.h. für alle möglichen Mengen X, Y, Abbildungen f von X nach Y und Teilmengen $A \subset X, B \subset Y$):

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$,
2. $A \supset f^{-1}(f(A))$,
3. $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$,
4. $B \supset f\left(f^{-1}(B)\right)$?

Inwieweit ändert sich die Antwort, wenn f surjektiv, injektiv oder bijektiv ist?

Lösung. Wir erörtern gleich, welche Aussagen unter welchen Voraussetzungen richtig sind, geben am Anfang aber immer eine Antwort für den allgemeinen Fall.

1. Richtig. Ist $x \in A$, dann gilt $x \in X$ und $f(x) \in f(A)$, was nach Definition $x \in f^{-1}(A)$ bedeutet.
2. Falsch. Man nehme das obige Beispiel vom Fall (b). Dann gilt $f^{-1}(f(A)) = X \not\subset A$. Wie man sieht, kann die Aussage für surjektive Abbildungen f falsch sein (denn unsere Beispielabbildung ist surjektiv).

   Sie wird jedoch richtig, wenn f injektiv ist. Sei dazu $x \in f^{-1}(f(A))$. Dann gilt $y := f(x) \in f(A)$. D.h., dass es ein $\tilde{x} \in A$ gibt mit $y = f(\tilde{x})$. Aus der Injektivität folgt $x = \tilde{x} \in A$.
3. Falsch. Hier sei $X := \{0\}, Y := \{0,1\}, B := Y$ und $f := (X, \{(0,0)\}, Y)$. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = \{0\} \not\supset B$.

   Diese Aussage wird jedoch richtig, wenn f surjektiv ist. Angenommen, dies ist so und es sei $y \in B$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es folgt $x \in f^{-1}(B)$. Und hieraus erhalten wir $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.
4. Diese Aussage ist immer korrekt. Ist nämlich $y \in f(f^{-1}(B))$, so gibt es ein $x \in f^{-1}(B)$ mit $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B)$ bedeutet aber nach Definition $f(x) \in B$, woraus man sofort $y \in B$ erhält.

□

Aufgabe 4

- $f : A \to B$ injektiv

  $g : B \to A$ injektiv

  $F(C) := A \setminus g(B \setminus f(C))$ ist definiert

  für jede Teilmenge C von A.

Angenommen es gibt $C \subset A$ nichtleer mit $F(C) = C$.

1) $f : C \to f(C) = \{ y \in B : \exists x \in C \text{ mit } f(x) = y \}$

   ist eine Bijektion zwischen C und $f(C)$ da f injektiv ist

2) $g : B \setminus f(C) \to g(B \setminus f(C))$ ist auch eine Bijektion.

- $A = (A \setminus C) \cup C \overset{C = F(C)}{=} (A \setminus (A \setminus g(B \setminus f(C)))) \cup C$

  $= g(B \setminus f(C)) \cup C$

Definiere : $\phi : A \to B$

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in C \\ g^{-1}(x) & \text{für } x \in g(B \setminus f(C)) \end{cases}$$

Nach 1) & 2) ist ϕ eine Bijektion.

Zusatzfrage: Zu zeigen: Wenn es $f: A \to B$ inj. und $g: B \to A$ inj. gibt, dann gibt es $C \subset A$ mit $F(C) = C$.

Sei $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine Familie von Teilmengen von A.

i) $f(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i)$ wenn f injektiv ist.

ii) $f(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$ für alle Abbildungen.

iii) $F(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = A \setminus g(B \setminus f(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i))$

$= A \setminus g(B \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i))$ (nach i))

$= A \setminus g(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \setminus f(A_i))$ (de Morgan's Gesetz)

$= A \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} g(B \setminus f(A_i)))$ (nach ii))

$= \bigcap_{i=1}^{\infty} A \setminus g(B \setminus f(A_i))$ (de Morgans Gesetz)

$= \bigcap_{i=1}^{\infty} F(A_i)$

iv) Betrachte $A_1 = A$, $A_2 = F(A)$, $A_3 = F^2(A), \ldots$

Def: $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A \cap F(A) \cap F^2(A) \cap F^3(A) \cap \ldots$

$\Rightarrow F(C) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(A_i) = F(A) \cap F^2(A) \cap F^3(A) \cap \ldots$

$= C$ da $A \cap F(A) = F(A)$ ist.

Also haben wir ein C konstruiert mit $F(C) = C$

Quelle: Aigner/Ziegler "Das Buch der Beweise" S. 109 ff