Übungsblatt 10 : Lösungsskizzen

Aufgabe 1

a)

$$\phi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{n} \cdot x \qquad \updownarrow n-1$$

Die Matrix ist schon in Zeilenstufenform.

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\phi = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v} \Big\}$$

Die Vektoren in $\mathbb{R}^n/\operatorname{Ker}\phi$ sind Mengen der Form $\{x+\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, wo $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(e_1-e_2, \dots, e_{n-1}-e_n) \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \} \end{aligned}$$

Die ~~Mengen~~ Menge $\{x+\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ~~haben~~ hat nur einen Schnittpunkt mit $\mathcal{U}$, nämlich für $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda) = 0$, also $\lambda = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Definiere $\varphi : \mathbb{R}^n/\operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \mathcal{U}$

$$\{x+\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

φ ist offensichtlich linear.

Was ist $\operatorname{Ker} \Psi$?

$\Psi(\{x + \lambda \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \forall k$

also $x_k = x_\ell$, also $x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

für einen $\mu \in \mathbb{R}$

Daraus folgt $\{x + \lambda \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \sim \{\lambda \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^n / \operatorname{Ker} \phi$. Aber $\{\lambda \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist der Nullvektor in $\mathbb{R}^n / \operatorname{Ker} \phi$, Also $\operatorname{Ker} \Psi = \{0\}$ und Ψ ist injektiv.

Da $\dim(\mathbb{R}^n / \operatorname{Ker} \phi) = \dim \mathcal{U} = n-1$ ist Ψ bijektiv.

b) $\rho\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\sim \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ in V

$$\rho \circ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \rho\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{Nullvektor in } V}$$

Also $\rho \circ f$ ist die Nullabbildung

$\Rightarrow \bar{f}$ ist die Nullabbildung.

c) $F(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot x$

α) • $F(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}\Big)$

• $\operatorname{Im} F = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$

aber $\dim \operatorname{Im} F = 2$. (da $\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F = 4$)

Dies sieht man auch durch Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf den Spalten der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Es folgt:

$\operatorname{Im} F = \operatorname{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w_2}\Big)$ und

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir wählen $w' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man zeigt leicht, dass $\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$, also bildet (w_1, w_2, w') eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Gleich: $\operatorname{Rang}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 4$.

β) $x \in \operatorname{Im} F \Rightarrow x = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$F^{-1}(x) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \mid \mu_i \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow F^{-1}(x) \cap U = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ da $v_i \notin U$

j) $\rho: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 / \operatorname{Ker} F$

$x \longmapsto x + \operatorname{Ker} F = \{x + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

Wir verwenden die Basis (u_1, u_2, v_1, v_2) in $\mathbb{R}^4$.
Also gibt es $\forall x \in \mathbb{R}^4$ eindeutige μ_i, τ_i, $i \in 1,2$
mit

$x = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2$

$\Rightarrow \rho(x) = \{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

Def: $\overline{F}: \mathbb{R}^4 / \operatorname{Ker} F \longrightarrow \operatorname{Im} F$

$\{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\} \mapsto \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$

$\overline{F}$ ist offensichtlich linear.

$\Rightarrow \overline{F} \circ \rho(x) = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = F(x)$

- $\operatorname{Ker} \overline{F} = \{ \underbrace{\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}}_{\text{Nullvektor von } \mathbb{R}^4/\operatorname{Ker} F} \}$

$\Rightarrow$ Also ist $\overline{F}$ injektiv

- Da $\dim \mathbb{R}^4 / \operatorname{Ker} F = \dim \operatorname{Im} F = 2$
folgt aus der Injektivität von $\overline{F}$, daß $\overline{F}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2

a) $\phi \circ \phi = \phi$

α) Sei $x \in \operatorname{Ker}\phi \cap \operatorname{Im}\phi$

$\Rightarrow x = \phi(y)$ und $\phi(x) = 0$

$$0 = \phi(x) = \phi^2(y) \underset{\underset{\phi\circ\phi=\phi}{\uparrow}}{=} \phi(y) = x \Rightarrow x = 0$$

Also $\operatorname{Ker}\phi \cap \operatorname{Im}\phi = \{0\}$

da $n = \dim(\operatorname{Ker}\phi) + \dim(\operatorname{Im}\phi)$

folgt aus $\operatorname{Ker}\phi \cap \operatorname{Im}\phi = \{0\}$ dass

$\operatorname{Ker}\phi \oplus \operatorname{Im}\phi = V$

β) Da $V = \operatorname{Ker}\phi \oplus \operatorname{Im}\phi$ können wir jeden $x \in V$ schreiben (eindeutigerweise) als $x = u_1 + u_2$ mit $\begin{cases} u_1 \in \operatorname{Im}\phi \\ u_2 \in \operatorname{Ker}\phi \end{cases}$

$u_1 \in \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \exists y$ mit $\phi(y) = u_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(u_1) = \phi^2(y) = \phi(y) = u_1 \\ \phi(u_2) = 0 \end{cases}$$

Also $\phi(u_1 + u_2) = u_1 \quad \forall u_1 \in \operatorname{Im}\phi,\ u_2 \in \operatorname{Ker}\phi$

b) $\phi \circ \phi = id_V$

<u>Def</u>: $\psi_2 = \frac{1}{2}(\phi + id_V)$, $\psi_1 = \frac{1}{2}(-\phi + id_V)$

$$\psi_2 \circ \psi_2 = \frac{1}{4}(\phi\circ\phi + \phi\circ id_V + id_V\circ\phi + id_V \circ id_V)$$
$$= \frac{1}{4}(id_V + \phi + \phi + id_V) = \psi_2$$

$\psi_1 \circ \psi_1 = \psi_1$

__Def:__ $\mathcal{U}_i = \operatorname{Ker} \psi_i$

Sei $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$

$$\Rightarrow (\phi + id_V)(x) = (\phi - id_V)(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\phi(x) \\ x = \phi(x) \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Sei jetzt $x \in \operatorname{Im} \psi_1$ $\cancel{x = \frac{1}{2}(y + \phi(y))}$

$$\Rightarrow x = \tfrac{1}{2}(y - \phi(y))$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{4}\left(y + \phi(y) - \phi(y) - \phi^2(y)\right) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \psi_1 \subset \operatorname{Ker} \psi_2$

Ähnlich: $\operatorname{Im} \psi_2 \subset \operatorname{Ker} \psi_1$ $\Rightarrow \begin{cases} \dim \operatorname{Im} \psi_1 \leq \dim \operatorname{Ker} \psi_2 \\ \dim \operatorname{Im} \psi_2 \leq \dim \operatorname{Ker} \psi_1 \end{cases}$

Wir wissen dass

$$n = \dim \operatorname{Ker} \psi_1 + \dim \operatorname{Im} \psi_1$$

$$n = \dim \operatorname{Ker} \psi_2 + \dim \operatorname{Im} \psi_2$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \psi_1 + \dim \operatorname{Ker} \psi_2 \geq n$$

da $\operatorname{Ker} \psi_1 \cap \operatorname{Ker} \psi_2 = 0$, muss "=" gelten.

Also $\underbrace{\operatorname{Ker} \psi_1}_{\mathcal{U}_1} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker} \psi_2}_{\mathcal{U}_2} = V$

$$u_1 \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow \psi_1(u_1) = 0 \Rightarrow \phi(u_1) = u_1$$

$$u_2 \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow \psi_2(u_2) = 0 \Rightarrow \phi(u_2) = -u_2$$

Aufgabe 3

a) Wir wissen, dass

$$\text{Lös}(A,b) = u + \text{Lös}(A,0)$$, wo u

eine spezifische Lösung der Gleichung

$A \cdot x = b$ ist.

Hier: $\text{Lös}(A,0) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$

$$u = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ -1 & -2 & 2 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 3 & b_1 + b_2 \\ 0 & -3 & -3 & -2b_1 + b_3 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 3 & b_1 + b_2 \\ 0 & -3 & 0 & -b_1 + b_2 + b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3(b_1 - b_2 - b_3) \\ 0 & 0 & 1 & 1/3(b_1 + b_2) \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1/3(2b_1 - b_2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/3(b_1 - b_2 - b_3) \\ 0 & 0 & 1 & 1/3(b_1 + b_2) \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3(b_2 + 2b_3) \\ 0 & 1 & 0 & 1/3(b_1 - b_2 - b_3) \\ 0 & 0 & 1 & 1/3(b_1 + b_2) \end{array}\right)$

Also $x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B \cdot b$

c) $A \cdot x = \lambda x \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}}_{=:B\lambda} \cdot x = 0$

Damit $\text{Lös}(B\lambda, 0)$ nicht Nulldimensional ist, muss $\text{rang}\, B\lambda < 2$ sein.

$\left(\begin{array}{cc|c} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-(4-\lambda)(7-\lambda) & 0 \end{array}\right)$

$0 \stackrel{!}{=} 4 - (4-\lambda)(7-\lambda) = 4 - 28 + 11\lambda - \lambda^2$

$\Rightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$

$$\lambda = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda = 8, 3$$

Also gilt nur für $\lambda \in \{8, 3\}$, dass $\operatorname{rang}(B\lambda) = 1$

1) $\lambda = 8$, $B_8 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} B_8 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

2) $\lambda = 3$, $B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} B_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Aufgabe 4

a) $0 \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} 0$ wo f und g Nullabbildungen sind.

$\operatorname{Im} f = \{0\} \subset V$

$\operatorname{Ker} g = V$

Da $\operatorname{Ker} g \overset{!}{=} \operatorname{Im} f \Rightarrow V = \{0\} \Rightarrow V$ ist 0, ein Nulldimensionaler Vektorraum

b) $0 \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} 0$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g = \{0\} \Rightarrow f$ ist injektiv

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} h = W \Rightarrow f$ ist surjektiv

$\Rightarrow f$ ist ein Isomorphismus.

c)
- $\dim \operatorname{Ker} f_i + \dim \operatorname{Im} f_i = \dim V_i$
- $\dim \operatorname{Im} f_i = \dim \operatorname{Ker} f_{i+1}$
- $\dim \operatorname{Ker} f_1 = 0$, $\dim \operatorname{Im} f_{n-1} = \dim V_n$

Also
$$\begin{cases} \dim V_1 = \dim \operatorname{Im} f_1 \\ \dim V_2 = \dim \operatorname{Im} f_1 + \dim \operatorname{Im} f_2 \\ \vdots \\ \dim V_{n-1} = \dim \operatorname{Im} f_{n-2} + \dim \operatorname{Im} f_{n-1} \\ \dim V_n = \dim \operatorname{Im} f_{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$
Es folgt die Aussage.