Übungsblatt 11: Lösungsskizzen

Aufgabe 1

- $AX = B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$

$AX = B$ ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 2 \\ -x_1 + 2x_3 &= -2 \\ -x_2 + 2x_4 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

x_5 und x_6 sind frei

$\Rightarrow$ Jede Lösung der Gleichung $AX = B$ ist der Form

$$X = \begin{pmatrix} -2\lambda & 5-2\mu \\ -1-\lambda & 3-\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- $YA = C \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 \end{pmatrix}$

$YA = C$ führ zu 3 unabhängige Gleichungssysteme

$$D \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1, \quad D \cdot \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = c_2, \quad D \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = c_3$$

mit $D = A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1^t \\ c_2^t \\ c_3^t \end{pmatrix}$

also z.B. $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b_1 \\ -1 & 2 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2b_1+b_2 \\ 0 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

falls $2b_1 + b_2 - b_3 = 0$,
was für die Vektoren c_i wahr ist.

Also $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist die einzige Lösung der Gleichung $Y \cdot A = C$

Aufgabe 2

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Kern

• $CX = 0$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -14 & -10 & -6 & 0 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ x_3 und x_4 sind frei

$$\text{Kern}(F) = \text{span}_{\mathbb{R}}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}}_{=: v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v_2} \right)$$

Bild $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
mittels elementare Spaltentransformationen.

<u>Bemerkung:</u> Wir wissen dass

$\dim \mathrm{Im} F = 2$ da $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im} F = \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

Also können wir <u>zwei</u> beliebige <u>lin. unabhängige</u> Spalten von C nehmen um $\mathrm{Im}(F)$ aufzuspalten.

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=:w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{=:w_2}\right)$$

$$w_1 = F\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}}_{=:v_1}\right), \quad w_2 = F\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=:v_2}\right)$$

Man überprüft leicht, dass $(v_1, v_2, v_3, v_4) =: \mathcal{A}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Sei $w_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und überprüfe, dass $\mathcal{B} := (w_1, w_2, w_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Da
$$F(v_i) = w_i \quad i = 1,2$$
$$F(v_j) = 0 \quad j = 3,4$$

gilt

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

b) $\theta: V \to V$, $f \to f'$

$\theta(\lambda f + \mu g) = \lambda\theta(f) + \mu\theta(g)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wegen der bekannten Eigenschaften der Ableitung

$\theta(t^k) = k t^{k-1}$

$\mathcal{B} := (1, t, \dots, t^n)$

Also

$$M_{\mathcal{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \\ & & & & n-1 & 0 \\ & & & & 0 & n \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\eta : V \longrightarrow V$

$\eta(f)(t) := f(t+a)$

$$\Rightarrow \eta(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)(t+a)$$
$$= \lambda f(t+a) + \mu g(t+a) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ f, g \in V$$
$$= \lambda \eta(f)(t) + \mu \eta(g)(t)$$

Also ist η linear.

$\cancel{\eta(t^k)\,a(t)} =$

$$\eta(t^k)(t) = (t+a)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} t^l a^{k-l}$$

nach dem Binomialsatz

$$M_{\mathcal{B}}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & \binom{n}{0} a^n \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & \cdots & \binom{n}{1} a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 3a & \cdots & \binom{n}{2} a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n}{3} a^{n-3} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \binom{n}{n-2} a^2 \\ \vdots & & & & & \binom{n}{n-1} a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) $\mathcal{A} = (k_1, \dots, k_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

$k_i = k_{i,1} e_1 + \dots + k_{i,n} e_n$, $\underline{k_{i,j} \in \mathbb{R}}$

ist der Ausdruck für k_i in der Basis $(e_1, \dots, e_n)$ $\left(k_i = \begin{pmatrix} k_{i,1} \\ \vdots \\ k_{i,n} \end{pmatrix} \right)$

$\Phi_{B_V}(e_j) = v_j \quad j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \Phi_{B_V}(k_i) = \Phi_{B_V}\left(\sum_{j=1}^{n} k_{i,j} e_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} \Phi_{B_V}(e_j) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} v_j$$

<u>Zu zeigen</u>: $(\Phi_{B_V}(k_1), \dots, \Phi_{B_V}(k_n))$ ist eine Basis. Aus Dimensionsgründen muß man nur zeigen, dass die $\Phi_{B_V}(k_i)$ lin. unabhängig sind.

$$\alpha_1 \Phi_{B_V}(k_1) + \dots + \alpha_n \Phi_{B_V}(k_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (k_{11} v_1 + \dots + k_{1n} v_n) + \dots + \alpha_n (k_{n1} v_1 + \dots + k_{nn} v_n) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 k_{11} + \dots + \alpha_n k_{n1}) v_1 + \dots + (\alpha_1 k_{1n} v_n + \dots + \alpha_n k_{nn}) v_n$$

Da $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis ist, folgt

$\alpha_1 k_{i,1} + \dots + \alpha_n k_{i,n} = 0$ für $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \underline{K} \cdot \alpha = 0$ mit $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ und

$\underline{K} = \begin{pmatrix} k_1^t \\ \vdots \\ k_n^t \end{pmatrix}$, d.h. die Zeilen von $\underline{K}$ sind die Transponierte Spaltenvektoren k_i

Rang$(\underline{K}) = n$ da $(k_1, \dots, k_n)$ eine Basis ist.

Also ist $\alpha = 0$ die einzige Lösung.

$\Rightarrow \left(\Phi_{B_V}(k_1), \dots, \Phi_{B_V}(k_n)\right)$ ist eine Basis.

b) Wir verwenden a)

$k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \end{pmatrix} \quad k_3 = \begin{pmatrix} m-1 \\ m-2 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir vervollständigen (k_1, k_2, k_3) zu einer Basis $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m)$ von $\mathbb{R}^m$

Nehme: $\underline{k_i = e_i}$ $\quad i = 4, \dots, m$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & m-2 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & m-3 & 0 & & 0 \\ 0 & 4 & m-4 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m-1 & 1 & & & 1 \\ 0 & m & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 0 & & \\ 1 & 2 & m-2 & 0 & & \\ 0 & 3 & m-3 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Diese Matrix hat Rang } m \text{ da}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & 2 & m-2 \\ 0 & 3 & m-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ Rang 3 hat $\Rightarrow (k_1, \dots, k_m)$ ist eine Basis.

Nach a) ist dann

$\Phi_{B_W}(k_i)$ eine Basis von W

$$w_1^* = 1 + t - 2 = t - 1 = \Phi_{B_W}(k_1)$$

$$w_2^* = \Phi_{B_W}(k_2) = 1 + 2(t-2) + 3t^2 + \dots + (m-1)t^{m-2} + m(t^{m-1} - t^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)t^k - (4 + mt^2)$$

$$w_3^* = (m-1) + (m-2)(t-2) + (m-3)t^2 + \dots + t^{m-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} (m-k-1)\, t^k - 2(m-2)$$

$$w_4^* = t^4$$

$$\vdots$$

$$w_{m-1}^* = t^{m-2}$$

$$w_m^* = t^{m-1} - t^2$$

Aufgabe 4

a) Allgemein: Sei A eine $m \times n$ Matrix
Sei B eine $n \times r$ Matrix

dann ist $C = A \cdot B$ wohldefiniert.

Seien die Koeffizienten von A a_{ij}
mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$
Seien die Koeffizienten von B b_{jk}
mit $j = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, r$
Seien die Koeffizienten von C c_{ik}
mit $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, r$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Seien jetzt A und B untere Dreiecksmatrizen,

also $\begin{cases} a_{ij} = 0 & i < j \quad (*) \\ b_{jk} = 0 & j < k \quad (**) \end{cases}$

$$\Rightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=\underset{(**)}{k}}^{\overset{(*)}{i}} a_{ij} b_{jk}$$

Für $k > i$ ist also die Summe <u>leer</u>.

$\Rightarrow c_{ik} = 0$ für $i < k$

b) Sei A eine $m \times n$ Matrix.

Damit A^2 wohldefiniert ist, muss $m = n$ sein. Dann ist jede weitere Potenz $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}$ wohldefiniert da A^k eine $m \times m$ Matrix ist für $m = n$.

<u>Also</u>: Die notwendige und hinreichende Bedingung ist $\underline{m = n}$.

(5)

c) Sei A eine $m \times m$ (wegen b)) Matrix mit Koeffizienten a_{ij}, wo $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \leq j$. ($\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j+1$)

Seien $a_{ij}^{(k)}$ die Koeffizienten der Matrizen A^k. Insbesonders $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$

- $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=j+1}^{i-1} a_{ik} a_{kj}$

Für $j+1 > i-1$ ist $a_{ij}^{(2)} = 0$

Wir kommen also zur Vermutung

$$\boxed{a_{ij}^{(k)} = 0 \text{ für } i < j+k} \quad (*)$$

Wir beweisen die Vermutung per Induktion

- Für $k = 1, 2$ ist die Vermutung wahr.
- Induktionsschritt

$a_{ij}^{(k)} = 0$ für $i < j+k$

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{n=1}^{m} a_{in}^{(1)} a_{nj}^{(k)}$$

$$= \sum_{n=j+k}^{i-1} a_{in}^{(1)} a_{nj}^{(k)} = 0 \text{ für } j+k > i-1$$

$$= 0 \text{ für } i < j+k+1$$

Also wurde $(*)$ bewiesen.

Die Koeffizienten von A^m sind 0 für $i < j+m$. Dies ist aber immer wahr, da $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, m$. Also ist A^m die Nullmatrix.

Daraus folgt $A^{m+n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\{A^k : k \in \mathbb{N}\} = \{0, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$$