Übungsblatt 13: Lösungsskizzen

Aufgabe 1: Wir schreiben $|A| = \det(A)$

A) $\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&0&0&-5\\0&2&0&0&-5\\0&0&3&0&-5\\0&0&0&4&-5\\1&1&1&1&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&0&0&-5\\0&2&0&0&-5\\0&0&3&0&-5\\0&0&0&4&-5\\0&0&0&0&6+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1&0&0&0&-5\\0&2&0&0&-5\\0&0&3&0&-5\\0&0&0&4&-5\\0&0&0&0&\frac{197}{12}\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{197}{12} = 394$

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist gegeben durch den Produkt der Diagonalelementen.

B) $\begin{vmatrix} a_1&0&b_1&0\\0&c_1&0&d_1\\a_2&0&b_2&0\\0&c_2&0&d_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1&b_1&0&0\\a_2&b_2&0&0\\0&0&c_1&d_1\\0&0&c_2&d_2\end{vmatrix}$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1)$

C) $C = \sum_{i=1}^{n} E_i^{n+1-i} = \begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & ⋰ & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$

$|C| = -\begin{vmatrix} 1&\cdots&&0\\0&0&1&0\\\vdots&⋰&0&\vdots\\1&&&\vdots\\0&\cdots&&1\end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{vmatrix}$ wobei m wird bestimmt durch (*)

(*) $n = \begin{cases} 2m & n \text{ gerade}\\ 2m+1 & n \text{ ungerade}\end{cases}$

m ist die Anzahl von Vertauschungen, die man durchführen muss.

Also

$$|C| = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Definition: $\lfloor x \rfloor := \max\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$

(z.B. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ und so weiter)

$$\boxed{\text{Dann} \quad |C| = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

D) $\det(D) = 0$ da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} D \Rightarrow \operatorname{rang}(D) < 6$

Aufgabe 2

Nach Sarrus sollte $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ gleich

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$
$$- a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} - a_{42}a_{33}a_{24}a_{11} - a_{43}a_{34}a_{21}a_{12} - a_{44}a_{31}a_{22}a_{13}$$

sein. Also sollte $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ sein.

Wir wissen aber aus Aufgabe 1) c), dass $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} = (-1)^2 = 1$. ↯

Aufgabe 3

a)

α) $Sp(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$$\Rightarrow Sp(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = Sp(BA)$$

β) $$Sp(\underbrace{A_1 \cdots A_{m-1}}_{=A} \underbrace{A_m}_{=B}) \underset{\text{Nach } \alpha)}{=} Sp(A_m A_1 \cdots A_{m-1})$$

Diese Eigenschaft nennt man Zyklizität.

γ) $Sp(SAS^{-1}) = Sp(S^{-1}SA) = Sp(E_n A) = Sp(A)$

b) $$Sp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \overset{!}{=} Sp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$Det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \overset{!}{=} Det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2$$

Also, $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\lambda_1^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

Aber $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang 1, während $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rang 0 hat. Da Ähnlichkeitstransf. den Rang erhalten bekommen wir einen Widerspruch.

c) $$\det(e^A) = \det(S e^A S^{-1}) = \det\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S A^n S^{-1}\right]$$
$$= \det\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (SAS^{-1})^n\right] = \det e^{SAS^{-1}}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{SAS^{-1}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Also $\det(e^A) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{Sp(SAS^{-1})}$

$= e^{Sp(A)}$

$\square$

Aufgabe 4

a) $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A)$
$= (-1)^n \det(A) \Rightarrow$ für n ungerade gilt also
$\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$.

b) In $\mathbb{Z}_2$ kann man aus der Gleichung
$x = -x$ <u>nicht</u> schliessen, dass $x = 0$ ist!
(Da 1 in $\mathbb{Z}_2$ die Gleiche Eigenschaft hat)
Die Matrix $A = 1 \in M(1\times 1; \mathbb{Z}_2)$ ist
schiefsymmetrisch und nicht Null.

c) $\overline{\det(A)} = \det(\overline{A}) = \det(A^t) = \det(A)$
Also ist $\det(A)$ reell.
($\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ impliziert $\overline{A}^t = A \Rightarrow \overline{A} = A^t$)
(Hier schreiben wir $\overline{A} = A^*$ für die
komplex konjugierte Matrix)