Übungsblatt 2 : Musterlösungen

Aufgabe 1

a) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad h := g \circ f$

1) h inj $\Rightarrow f$ inj $\Leftrightarrow \neg h$ inj $\Leftarrow \neg f$ inj

$\neg f$ inj $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2) \Rightarrow \neg h$ inj

2) Gleich.

3) h surj $\not\Rightarrow f$ surj : $\mathbb{R} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2} \mathbb{R}_0^+$ (Bsp)

h inj $\not\Rightarrow g$ inj : $\mathbb{R}_0^+ \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2} \mathbb{R}_0^+$

b) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ mit $g \circ f \wedge h \circ g$ bij.

Nach a) gilt: $g \circ f$ bij $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ inj} \\ g \text{ surj} \end{cases}$ $\quad h \circ g$ bij $\Rightarrow \begin{cases} g \text{ inj} \\ h \text{ surj} \end{cases}$

Also ist g nach a) bijektiv

① $g \circ f$ bij $\Rightarrow \forall z \in C\ \exists x \in A$ s.d. $z = g(f(x))$

g bij $\Rightarrow f(x) = g^{-1}(z) = y \in B$

Also $\forall y \in B\ (\exists z \in C) \wedge (\exists x \in A)$ s.d. $f(x) = g^{-1}(z) = y$

$\Rightarrow f$ surj. $\Rightarrow f$ bij.

② $h \circ g$ bij $\Rightarrow h \circ g$ inj $\Rightarrow \forall y_1, y_2 \in B$ gilt $h(g(y_1)) = h(g(y_2))$
$\Rightarrow y_1 = y_2$

g bij $\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in C\ \exists y_1, y_2 \in B$ s.t. $z_i = g^{-1}(y_i)$

Also $h(z_1) = h(z_2) \Rightarrow h(g(g^{-1}(z_1))) = h(g(g^{-1}(z_2)))$

$\Rightarrow g^{-1}(z_1) = g^{-1}(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow h$ inj. $\Rightarrow h$ bij

Aufgabe 2

a) Sei $f: A \to B$

$f((x,y)) = x+y \Rightarrow R$ ist der Graph von f

Zu zeigen ist also, dass f bij. ist.

Surj Sei $b \in B \Rightarrow (\exists x \in X) \wedge (\exists y \in Y)$ s.d. $b = x+y$

Nach Definition von B

Dann ist $a := (x,y) \in A \Rightarrow (a,b) \in R$, also $f(a) = b$

inj $a_i = (x_i, y_i)$ $i = 1,2$ mit $f(a_1) = f(a_2)$

also $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

Da $x_i \in \{0, \dots, 4\}$ folgt $-4 \leq x_1 - x_2 \leq 4$

$\Rightarrow -4 \leq y_1 - y_2 \leq 4$ (*)

Andesseits: (**) $y_1 - y_2 = 5k$ mit $k \in \{-3, -2, \dots, 2, 3\}$

(*) und (**) sind nur für $k=0$ kompatibel

also $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow f$ inj.

b) $R = X \times X = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in X\}$ ist der Graph einer Abbildung $f: X \to X$

- Wenn X mehr als ein Element hat, dann $\exists x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1, x_1) \in R$ und $(x_1, x_2) \in R$

Also hat $f(x_1)$ als Menge mehr als ein Element

$\Rightarrow f$ ist keine Abbildung.

Eine notwendige Bedingung für X ist also, dass X nur aus ein Element besteht.

Sie ist auch hinreichend.

Aufgabe 3

1) Jst eine Äquivalenzrelation
2) Nicht Reflexiv
3) $f: X \to Y$, X und Y nicht leer.

   A1) $f(x) = f(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow$ reflexiv

   A2) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow$ sym.

   A3) $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$ transitiv.

4) reflexiv, symmetrisch aber nicht transitiv

   z.B. $2 \sim 6$ und $3 \sim 6$ aber $2 \not\sim 3$

5) A1) $\frac{p}{n} = \frac{p}{n} \Rightarrow$ reflexiv

   A2) $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{p_2}{n_2} = \frac{p_1}{n_1} \Rightarrow$ sym.

   A3) $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2} \wedge \frac{p_2}{n_2} = \frac{p_3}{n_3} \Rightarrow \frac{p_1}{n_1} = \frac{p_3}{n_3} \Rightarrow$ transitiv

Aufgabe 4

So wie die Aufgabe formuliert ist, haben wir für D_n die Relationen.
$R_i R_j = R_{i+j}$, $R_i S_j = S_{i+j}$, $S_i R_j = S_{i-j}$, $S_i S_j = R_{i-j}$ (modulo n)

a) 1)

Also:

	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_0	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_1	R_1	R_2	R_0	S_1	S_2	S_0
R_2	R_2	R_0	R_1	S_2	S_0	S_1
S_0	S_0	S_2	S_1	R_0	R_2	R_1
S_1	S_1	S_0	S_2	R_1	R_0	R_2
S_2	S_2	S_1	S_0	R_2	R_1	R_0

Musterrechnung: $S_0 S_1 \left({}^{2}_{3}\triangleright_{1} \right) = S_0 \left({}^{1}_{3}\triangleright_{2} \right) = {}^{3}_{1}\triangleright_{2}$

$= R_2 \left({}^{2}_{3}\triangleright_{1} \right)$

2) Aus $S_i^{-1} = S_i$

$R_i S_j = S_{i+j}$ folgt

$S_i R_j = S_{i-j}$

$S_i S_j = R_{i-j}$

$S_i R_j S_i^{-1} = S_i R_j S_i = S_{i-j} S_i = R_{-j} = R_{3-j}$

Also für jede Spiegelung S_i haben wir

$S_i R_0 S_i = R_0 \quad S_i R_1 S_i = R_2 \quad S_i R_2 S_i = R_1$

Da natürlich $R_j R_i R_j^{-1}$ eine Rotation ist, folgt dass die Menge der Rotationen einen Normalteiler bildet.

b) $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ schreiben wir also $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}$. Also $\sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) $\sigma_{12} \circ \sigma_{12} (1) = \sigma_{12}(2) = 1$

$\sigma_{12} \circ \sigma_{12} (2) = \sigma_{12}(1) = 2$

und so weiter $\Rightarrow \sigma_{12} \circ \sigma_{12} = \sigma_{23} \circ \sigma_{23} = id$

2) $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} (1) = \sigma_{12}(1) = 2$

$\sigma_{23} \circ \sigma_{12} (1) = \sigma_{23}(2) = 3$

$\Rightarrow \sigma_{12} \circ \sigma_{23} \neq \sigma_{23} \circ \sigma_{12}$

3) $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{12} (1) = \sigma_{12} \sigma_{23} (2) = \sigma_{12}(3) = 3$

$\sigma_{23} \sigma_{12} \sigma_{23} (1) = \sigma_{23} \sigma_{12} (1) = \sigma_{23}(2) = 3$

⋮

und so weiter