# Übungsblatt 3 : Musterlösungen

## Aufgabe 1 : A und B sind Untergruppen von G

a) · $x,y \in A \cap B \Rightarrow \begin{array}{ll} x \cdot y \in A & \text{da } x,y \in A \\ x \cdot y \in B & \text{da } x,y \in B \end{array} \Rightarrow x \cdot y \in A \cap B$

· $e \in A \cap B$

· $x^{-1} \in A \cap B$ da $\begin{array}{l} x \in A \Rightarrow x^{-1} \in A \\ x \in B \Rightarrow x^{-1} \in B \end{array}$

b) $\nexists (A \cup B \text{ Untergruppe} \wedge ((A \setminus B) \neq \emptyset) \wedge ((B \setminus A) \neq \emptyset))$

$\Leftrightarrow \neg (A \cup B \text{ Untergruppe} \Leftrightarrow (A \subset B) \vee (B \subset A))$

D.h. wenn die erste Aussage zu einem Widerspruch führt, dann ist die zweite wahr.

$A \setminus B \neq \emptyset \wedge B \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \exists\, x \in A \setminus B \\ \exists\, y \in B \setminus A \end{cases}$

$A \cup B$ Untergruppe $\Rightarrow x \cdot y \in A \cup B$

$x^{-1} \in A \Rightarrow x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = y \in B \setminus A$

Da $x^{-1} \in A$ kann $xy$ nicht in $A$ sein, da sonst $x^{-1}(xy) \in A$ folgen würde. Also $xy \notin A$

$y^{-1} \in B \Rightarrow (xy)y = x \in A \setminus B \Rightarrow xy \notin B$

$\Rightarrow x \cdot y \notin A \cup B \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme, dass $A \cup B$ eine Untergruppe ist.

Die andere Richtung, also $(A \subset B) \vee (B \subset A) \Rightarrow A \cup B$ Untergruppe ist trivial

c) ~~$(C \subset A) \vee (C \subset B) \Rightarrow$~~

Fehler in der Aufgabestellung, es soll lauten:

$C$ Untergruppe $\Rightarrow (C \subset A) \vee (C \subset B)$

Die Umkehrung ist nicht wahr.

$\Leftrightarrow \neg(\exists\, C$ Untergruppe mit $(C \not\subset A) \wedge (C \not\subset B)$ aber $C \subset A \cup B\,)$

Sei also $x \in C \setminus A$ und $y \in C \setminus B$ (also insbes. $x \in B$ und $y \in A$).

$\underset{B}{\underset{\cap}{x^{-1}}}(x \cdot y) = y \in C \setminus B$

$\Rightarrow x \cdot y \notin B$

$(x \cdot y)\underset{A}{\underset{\cap}{y^{-1}}} = x \in C \setminus A \quad \Rightarrow x \cdot y \notin A$

$\Rightarrow$ Widerspruch.

## Aufgabe 2

$H \subset G$ Untergruppe

a) A1) $x \sim x$ da $e \in H$

A2) $x \sim y \Rightarrow \exists\, h$ mit $xh = y \Rightarrow yh^{-1} = x \Rightarrow y \sim x$, $h^{-1} \in H$

A3) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow \exists\, h_1, h_2 \in H$ mit $xh_1 = y$, $yh_2 = z \Rightarrow x\underbrace{(h_1 h_2)}_{\in H} = z \Rightarrow x \sim z$

b) $x, y \in \mathbb{R}$ sind äquivalent, $x \sim y$, wenn $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ ~~[illegible]~~ $x + m = y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Die Quotientenmenge kann mit jedem Intervall $[x, x+1)$ identifiziert werden $(x \in \mathbb{R})$

c) $H = \{0, 4, 8\} \xrightarrow{f(x) = \frac{x}{4}} \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \Rightarrow f$ ist bijektiv

$f(x) + f(y) = \frac{x+y}{4} \bmod 3 = \frac{x+y \bmod 12}{4} = f(x+y)$

$\Rightarrow$ Gruppenhomomorphismus

Jetzt: $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$ sind äquivalent, ②

wenn $\exists z \in H$ mit $x + z = y \mod 12$

Also: $0 \sim 4 \sim 8$ $\Rightarrow \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2,3\} \simeq \mathbb{Z}_4$

$1 \sim 5 \sim 9$

$2 \sim 6 \sim 10$

$3 \sim 7 \sim 11$

Bem: Die Gruppenstruktur auf $\mathbb{Z}_4$ ist kompatibel mit dem Quotientabbildung $\pi: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_3$, d.h.

$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$

d) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ wenn $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $x_i = \lambda y_i \quad i = 1,2$

Die Äquivalenzklassen sind die Halbgeraden $\{ \lambda (\cos\theta, \sin\theta) : \lambda \in \mathbb{R}^+ \ \theta \in [0, 2\pi) \}$ und der Punkt $(0,0)$

Aufgabe 3: Man muss nur die Abgeschlossenheit zeigen:

a) 1) ist ein Ring, da

$$(a + b\sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) = \underbrace{(ax + 3by)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(bx + ay)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \in M$$

2) kein Ring, da

$$(a + b\sqrt[3]{3})(x + y\sqrt[3]{3}) = ax + (ay + bx)\sqrt[3]{3} + by(\sqrt[3]{3})^2 \notin M$$

3) ist ein Ring, da

$$(a + b\sqrt[3]{3} + c(\sqrt[3]{3})^2)(x + y\sqrt[3]{3} + z(\sqrt[3]{3})^2)$$

$$= (ax + 3bz + 3cy) + (ay + bx + 3zc)\sqrt[3]{3}$$

$$+ (az + cx + by)(\sqrt[3]{3})^2 \in M$$

b) Alle nicht triviale Ideale in $\mathbb{Z}$ sind des Form $m\mathbb{Z}$ für $m = \{2,3,4 - - \}$

c) R1) $(K(M), \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit Einselement die Abbildung $f_0 : M \to K$, $f_0(m) = 0 \ \forall m$

und ~~...~~: Inverses ~~...~~ die Abbildung $(-f) : m \mapsto -f(m)$

R2) Die Multiplikation $\odot$ ist assoziativ, da K ein Körper ist (K Ring reicht schon)

R3) Die Distributivgesetze gelten für $(K(M), \oplus, \odot)$, weil sie für $(K, +, \cdot)$ gelten.

K(M) ist im allgemeinen kein Körper, weil die Abbildung $f_m(n) = \begin{cases} 1 & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases}$ kein Multiplikatives Inverse hat und sie ist nicht die Nullabbildung.

Wenn M aber nur ein Element hat, dann gilt $K(M) \simeq K$. Dies ist eine notwendige und hinreichende Bedingung.

d) $\phi : R \to S$ Ringhomomorphismus $\Rightarrow \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \ \forall x, y \in R$

$\phi(x) = \phi(e_R \cdot x) = \phi(e_R)\phi(x) \quad \forall x \in R$
$= \phi(x \cdot e_R) = \phi(x) \cdot \phi(e_R)$

Wenn $\phi$ surj. ist $\Rightarrow \forall y \in S \ \exists x \in R$ mit $y = \phi(x)$

Dann $\phi(e_R) \cdot y = \phi(e_R) \cdot \phi(x) = \phi(x) = y \quad \forall y \in S$

$\Rightarrow \phi(e_R) = e_S$.

Dies ist eine hinreichende (nicht notwendige) Bedingung für $\phi$.

## Aufgabe 4

③

a) Alle Elemente von $H$ sind der Form $x^{k_i}$ für irgendwelche $k_i \in \{0, \ldots, n-1\}$

<u>Fall 1</u> $H = \{e\} \Rightarrow H$ ist zyklisch

<u>Fall 2</u> $H \neq \{e\} \Rightarrow \exists \underset{\text{kleinste}}{\hat{k}} \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\underbrace{x^k}_{=:y} \in H$

$H$ Untergruppe $\Rightarrow y^l \in H \; \forall l \Rightarrow \langle y \rangle \subset H$

zyklische Gruppe, die von $y$ erzeugt wird

Zu zeigen: $H \subset \langle y \rangle$.

Sei $x^m \in H \Rightarrow m = pk + q \quad p \in \mathbb{N}, 0 \le q < k$

$\Rightarrow x^m = x^{pk+q} = (x^k)^p x^q = y^p x^q$

$H$ Untergruppe und $x^m, y \in H \Rightarrow x^q \in H$

Da $k$ minimal ist $\Rightarrow q = 0 \Rightarrow x^m = y^p \Rightarrow H \subset \langle y \rangle$

$\Rightarrow H = \langle y \rangle$

b) Sei $H$ eine Untergruppe von $G$, die von $y = x^k$ erzeugt wird. Sei $m$ die Ordnung von $H \Rightarrow m$ ist die kleinste natürliche Zahl mit $y^m = e$

$0 \le k < n \Rightarrow n = pk + q \quad 0 \le q < k$

$e = x^n = x^n = (x^n)^m = x^{nm} = x^{(pk+q)m} = (x^k)^{pm} x^{qm}$

$= \underbrace{(y^m)^p}_{=e} (x^m)^q = (x^m)^q$

Da $y = x^k$ mit $k$ minimal, gilt dass $k$ die kleinste natürliche Zahl ist, so dass $(x^k)^m = (x^m)^k = e$

$\Rightarrow$ Da $0 \le q < k$ und $(x^m)^q = e$, gilt $q = 0$

$\Rightarrow m$ teilt $n$.