Musterlösungen : Übungsblatt 4

A1

a) SEIEN $a + b\sqrt{2}$ UND $c + d\sqrt{2}$ ZWEI ELEMENTE VON $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. DANN GILT:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

ALSO IST $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ BZGL. DER ADDITION ABGESCHLOSSEN.

SETZT MAN $a = b = 0$, ERHÄLT MAN EIN BZGL. DER ADDITION NEUTR. ELEMENT, WELCHES IN $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ LIEGT.

DA $(\mathbb{Q}, +)$ EINE ABELSCHE GRUPPE IST, GILT:

1) $(a+c) = c+a$ UND $b+d = d+b$. DARAUS FOLGT

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$$
$$= (c+a) + (d+b)\sqrt{2} = (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}).$$

2) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists -a \in \mathbb{Q}: \ a + (-a) = 0$

DARAUS FOLGT

$$\forall (a + b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\ \exists\ (-a) + (-b)\sqrt{2}: \ a + b\sqrt{2} + (-a) + (-b)\sqrt{2} = 0$$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: \ (a+b) + c = a + (b+c)$, DARAUS **FOLGT**

$\forall (a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}), (e + f\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$\left[(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})\right] + (e + f\sqrt{2}) =$$
$$\left[(a+c) + (b+d)\sqrt{2}\right] + (e + f\sqrt{2}) =$$
$$(a+c)+e + \left((b+d)+f\right)\sqrt{2} =$$
$$a + (c+e) + \left(b + (d+f)\right)\sqrt{2} =$$
$$a + b\sqrt{2} \quad \left[(c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})\right]$$

NIMMT MAN 1), 2), 3) ZUSAMMEN, FOLGT DASS $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ EINE ABELSCHE GRUPPE IST.

DA $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ EINE ABELSCHE GRUPPE IST, GILT

1) $\forall a,b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}: \quad a\cdot b = b\cdot a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$

2) $\exists 1\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}: \forall a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}: \quad 1\cdot a = a$

3) $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}: \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

WIR DEF. AUF $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ FOLGENDE MULTIPLIKATION

$$*(a+b\sqrt{2},\ c+d\sqrt{2}) := ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd$$
$$= (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

WEGEN 1) GILT DANN

$$(a+b\sqrt{2})*(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$
$$= (ca+2db)+(da+cb)\sqrt{2}$$
$$= (c+d\sqrt{2})*(a+b\sqrt{2})$$

WEGEN 2) GILT DANN MIT $a=1$, $b=0$

$$(1+0\cdot\sqrt{2}) = 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

UND

$$1*(c+d\sqrt{2}) = (1\cdot c + 2\cdot 0\cdot d) + (1\cdot d + 0\cdot c)\sqrt{2}$$
$$= c+d\sqrt{2}$$

ALSO IST 1 NEUTR. ELEM. BZGL. $\cdot$ IN $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

WEGEN 3) GILT DANN

$\forall (a+b\sqrt{2}),(c+d\sqrt{2}),(e+f\sqrt{2})\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}):$

$$[(a+b\sqrt{2})*(c+d\sqrt{2})]*(e+f\sqrt{2}) =$$
$$[ac+bd2+(ad+bc)\sqrt{2}]*(e+f(\sqrt{2})) =$$
$$(ac+bd2)e + 2(ad+bc)f + [(ac+bd2)f + (ad+bc)e]\sqrt{2} \quad (**)$$

DA $\mathbb{Q}$ EIN KERPER IST, GILT IN $\mathbb{Q}$ DAS DISTRIBUTIV GESETZ.

ALSO GILT

$$[(a+b\sqrt{2})*(c+d\sqrt{2})]*(e+f\sqrt{2}) = (**) = ace + 2bde + 2(adf+bcf)$$
$$+[acf+2bdf+(ade+bce)]\sqrt{2}$$

ENTSPRECHEND ZEIGT MAN

$$(a+b\sqrt{2})*\left[(c+d\sqrt{2})*(e+f\sqrt{2})\right]$$
$$= ace+2bde+2(adf+bcf)$$
$$+\left[acf+2bdf+(ade+bce)\right]\sqrt{2}$$

NIMMT DIE 3 AUSSAGEN ZUSAMMEN, FOLGT, DASS $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\setminus\{0\},*)$ EINE ABELSCHE GRUPPE IST.

DA $(\mathbb{Q},\cdot,+)$ EIN KÖRPER GILT DAS DISTRIBUTIVGESETZ:

$$\forall\, a,b,c\in\mathbb{Q}:\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

DARAUS FOLGT:

SEIEN $(a+b\sqrt{2}),(c+d\sqrt{2}),(e+f\sqrt{2})\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. DANN GILT

$$(a+b\sqrt{2})*\left((c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})\right)=$$
$$(a+b\sqrt{2})*\left((c+e)+(d+f)\sqrt{2}\right)=$$
$$a(c+e)+2b(d+f)+\left[a(d+f)+b(c+e)\right]\sqrt{2}\ =_{\text{DISTR. IN }\mathbb{Q}}$$
$$ac+ae+2(bd+\cancel{bf)+\left[ad+af+bc+be\right]\sqrt{2}=}$$
$$(a+b\sqrt{2})*(c+d\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2})*(e+f\sqrt{2})$$

ALSO GILT FÜR $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,*)$ DAS DISTRIBUTIVGESETZ.

FASST MAN ALLES ZUSAMMEN, FOLGT DAS $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,*)$ EIN KÖRPER IST. FOLGLICH IST $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,*)$ EIN TEILKÖRPER VON $\mathbb{R}$.
SETZT MAN STETS $b=0$, FOLGT $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ABER $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. $\square$

2) SEI K EIN KÖRPER MIT $K\subseteq\mathbb{R}$ UND $\sqrt{2}\in K$.

DANN ENTHÄLT K EIN NEUTR. ELEM. BEZGL. DER MULTIPL. GENANNT 1. DA FÜR ALLE $a,b\in K$ AUCH $a+b\in K$ GILT, FOLGT, DASS $\mathbb{N}\subset K$ GILT. DA FÜR JEDES $a\in K$ AUCH $\frac{1}{a}\in K$ GILT UND FÜR JEDES $b\in K$ DANN AUCH $b\cdot\frac{1}{a}=\frac{b}{a}\in K$ GILT, FOLGT $\mathbb{Q}\subset K$. DA $\sqrt{2}\in K$ VORAUSGESETZT WURDE, FOLGT $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}\subset K$.

$\square$

A2: a) $\Rightarrow$ SEI p EINE PRIMZAHL

FISCHER S.60 BEMERKUNG

EIN NULLTEILERFREIER, KOMMUTATIVER RING MIT ENDLICH VIELEN ELEMENTEN UND EINS IST EIN KÖRPER.

DAS $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ EIN KOMMUTATIVER RING MIT ENDL. VIELEN ELEM. UND EINS WURDE IN DER VORLESUNG GEZEIGT. <u>ES GENÜGT ALSO DIE NULLTEILERFREIHEIT ZU ZEIGEN.</u>

(1) SEIEN $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ MIT $a \cdot b = 0$, DASS HEISST

$$a \cdot b \equiv 0 \pmod p$$

$$\Rightarrow \quad p \mid a \vee p \mid b$$

p IST PRIMZAHL

$$\Rightarrow \quad a \equiv 0 \pmod p \vee b \equiv 0 \pmod p$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ NULLTEILERFREI.

(2) $\Leftarrow$ SEI $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ EIN KÖRPER.

<u>SATZ (FISCHER S.61)</u>

<u>IST K EIN KÖRPER, SO IST CHAR(K) ENTWEDER 0 ODER EINE PRIMZAHL.</u>

$\Rightarrow$

ES GENÜGT ZU ZEIGEN, DASS CHAR$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$ IST.

$$\text{CHAR}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \min\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : n \cdot 1 \equiv 0 \pmod p\}$$

$$= p \quad \text{(NACH DEF.)}$$

$\square$

b)

SEIEN K, K' ZWEI KÖRPER UND SEI ϕ EIN RINGHOMOMORPH.

Z.Z. WENN ϕ NICHT INJEKTIV $\Rightarrow$ ϕ IST NULLHOMOMORPH.

ANN. ϕ NICHT INJEKTIV. $\Rightarrow \exists\, x, y \in K : \phi(x) = \phi(y)$
$$\wedge\ x \neq y$$

DA K EIN KÖRPER IST, GILT $-y \in K$.

$$\phi(x+(-y)) = \phi(x) \oplus \phi(-y) = \phi(x) \oplus (-\phi(y)) = \phi(x) \oplus (-\phi(x)) = 0,$$

DA ϕ RINGHOM. IST. DA $x \neq y$ GILT, FOLGT $x-y \neq 0$.

ALSO IST $(x-y)^{-1} \in K$, DA K KÖRPER.

SEI $z \in K$ MIT $z \neq 0$. DANN GILT

$$z = z\,(x-y)^{-1} \cdot (x-y)$$

$$\Rightarrow \phi(z) = \phi(z(x-y)^{-1} \cdot (x-y)) = \phi(z(x-y)^{-1}) \odot \phi(x-y)$$
$$= \phi(z(x-y)^{-1}) \odot 0$$
$$= 0$$

ALSO GILT FÜR ALLE $z \neq 0$ AUS K, $\phi(z) = 0$. ALSO IST ϕ DER NULLHOMOMORPHISMUS.

$\square$

A3

a)

$$x^6 + x^4 + x^2 + 2x = (2x^2 + x + 1)\,q + r$$

$$x^6 + x^4 + x^2 + 2x \sim 4x^6 + x^4 + x^2 + 2x$$

$$4x^6 + x^4 + x^2 + 2x : (2x^2 + x + 1) = 2x^4 + 2x^3 + 2x + 1$$

$$-(4x^6 + 2x^5 + 2x^4)$$

$$-2x^5 - x^4 + x^2 + 2x$$

$$\simeq$$

$$4x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x$$

$$-(4x^5 + 2x^4 + 2x^3)$$

$$-2x^3 + x^2 + 2x$$

$$\simeq$$

$$4x^3 + x^2 + 2x$$

$$-(4x^3 + 2x^2 + 2x)$$

$$-x^2$$

$$\simeq$$

$$2x^2$$

$$-(2x^2 + x + 1)$$

$$-x - 1$$

$$\simeq$$

$$2x + 2$$

Lgs:

$$x^6 + x^4 + x^2 + 2x = (2x^2 + x + 1)\underbrace{(2x^4 + 2x^3 + 2x + 1)}_{q} + \underbrace{2x + 2}_{r}$$

b)

$$x^5+1 = (x^2+2x+1)\,q + r$$

$$x^5+1 : (x^2+2x+1) = x^3+3x^2+3x+1$$
$$-(x^5+2x^4+x^3)$$
$$-2x^4-x^3+1$$
$$\simeq 3x^4+4x^3+1$$
$$-(3x^4+6x^3+3x^2)$$
$$-2x^3-3x^2+1$$
$$\simeq 3x^3+2x^2+1$$
$$-(3x^3+6x^2+3x)$$
$$-4x^2-3x+1$$
$$\simeq x^2+2x+1$$
$$-(x^2+2x+1)$$
$$0$$

LSG: $x^5+1 = (x^2+2x+1)\underbrace{(x^3+3x^2+3x+1)}_{q} + \underbrace{0}_{r}$

c) (a)

SEIEN $a, b \in K[x]$ MIT $a = a_0 + a_1x + \dots + a_n x^n$

$b = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$

DANN GILT

$c = a\cdot b = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n+m} x^{n+m}$ MIT $c_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j$

DA K KOMMUTATIV IST, FOLGT $c_i = \sum_{k+j=i} b_j a_k$.

DAS SIND ABER GENAU DIE KOEFFIZIENTEN VON $b\cdot a$. ALSO GILT

$a\cdot b = b\cdot a$

(b) BETRACHTE DAS POLYNOM e MIT $e = 1 + 0\cdot x + 0x^2 + \dots + 0\cdot x^n = 1$

DANN HAT $a\cdot e$ DIE KOEFF. $c_i = \sum_{k+j=i} a_k e_j = a_i \Rightarrow a\cdot e = a$ □