

LinA I* Übungsblatt 5

Aufgabe 1

$\sum_1: 4/4$

Sei das Polynom f in $\mathbb{R}[t]$ definiert durch

$$f(t) = 2t^7 - 2t^6 + 6t^5 + 74t^4 + 6t^3 + 154t^2 + 2t + 78$$

Sehr schön!

a) Bestimmen Sie die Nullstellen λ_k von f und deren Vielfachheiten $\mu(f; \lambda_k)$ unter Benutzung der folgenden Tatsachen:

- -3 ist eine Nullstelle von f mit $\mu(f; -3) = 1$
- Die imaginäre Einheit i ist eine Nullstelle von f mit $\mu(f; i) = 2$.

λ_k ist Nullstelle $\Leftrightarrow f(\lambda_k) = 0$ (Def. Nullstelle)

Das bedeutet, es sind alle λ_k gesucht für die gilt $f(\lambda) = 0$. Dafür setzt man $f(t) = 0$ und löst nach t auf.

$$0 = f(t) = 2t^7 - 2t^6 + 6t^5 + 74t^4 + 6t^3 + 154t^2 + 2t + 78$$

Da schon zwei Nullstellen bekannt sind, kann das Polynom faktorisiert werden.
(Lemma, Fischer S. 65)

$$f(t) = (t - \lambda_1) \cdot g(t) \quad \text{mit } g \in \mathbb{R}[t]$$

$$\lambda_1 = -3 \text{ (vorgegeben), } \mu(f; -3) = 1$$

$$\Rightarrow f(t) = (t + 3) \cdot g(t) \quad \text{mit } g \in \mathbb{R}[t]$$

Um $g(t)$ zu bestimmen, führt man eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (2t^7 - 2t^6 + 6t^5 + 74t^4 + 6t^3 + 154t^2 + 2t + 78) : (t + 3) = 2t^6 - 8t^5 + 30t^4 - 16t^3 + 54t^2 - 8t + 26 \\ - (2t^7 + 6t^6) \\ \hline -8t^6 + 6t^5 + \dots \\ - (-8t^6 - 24t^5) \\ \hline 30t^5 + 74t^4 + \dots \\ - (30t^5 + 90t^4) \\ \hline -16t^4 + 6t^3 + \dots \\ - (-16t^4 - 48t^3) \\ \hline 64t^3 + 154t^2 + \dots \\ - (64t^3 + 192t^2) \\ \hline -38t^2 + 2t + 78 \\ - (-38t^2 - 114t) \\ \hline 116t + 78 \\ - (116t + 348) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$g(t) = 2t^6 - 8t^5 + 30t^4 - 16t^3 + 54t^2 - 8t + 26$$

Da die Nullstellen gesucht sind, setzen wir $f(t)=0$.

$$f(t) = 0 = (t+3) \cdot g(t)$$

$$\Rightarrow (t+3)=0 \vee g(t)=0$$

$$1) t+3=0 \Rightarrow t=\lambda_1 = -3$$

$$2) g(t)=0$$

Wir wissen:

$$\lambda_2 = i \text{ mit } \mu(f; \lambda_2) = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = -i \text{ mit } \mu(f; \lambda_3) = 2$$

DENN:

Nach Lemma (S. 67, Fischer) gilt: ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle vom Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$, so ist auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von $f \in \mathbb{R}[t]$ und beide Nullstellen haben die gleiche Vielfachheit.

$$\Rightarrow f(t) = (t+3) \cdot (t+i)(t-i) \cdot (t+i)(t-i) \cdot q(t) \text{ mit } q \in \mathbb{R}[t] \\ = (t+3) \cdot g(t)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = (t+i)(t-i)(t+i)(t-i) \cdot q(t)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = (t^2 - i^2)(t^2 - i^2) \cdot q(t)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = (t^2 + 1)(t^2 + 1) \cdot q(t)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = (t^4 + 2t^2 + 1) \cdot q(t)$$

Um $q(t)$ zu bestimmen, führt man eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (2t^5 - 8t^4 + 30t^3 - 16t^2 + 54t^2 - 8t + 26) : (t^4 + 2t^2 + 1) = 2t^2 - 8t + 26 \\ -(2t^5 + 4t^4 + 2t^2) \\ \hline -8t^4 + 26t^3 - 16t^2 + 52t^2 - 8t + 26 \\ -(-8t^4 - 16t^3 - 8t) \\ \hline 26t^3 + 52t^2 + 26 \\ -(26t^3 + 52t^2 + 26) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$q(t) = 2t^2 - 8t + 26$$

zurück zu 2) $g(t)=0$

$$\Rightarrow g(t)=0 = (t^4 + 2t^2 + 1) \cdot q(t)$$

$$\Rightarrow (t^4 + 2t^2 + 1) = 0 \vee q(t) = 0$$

$$3) (t^4 + 2t^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_2 \text{ und } \lambda_3 \text{ wie oben}$$

$$4) q(t) = 0 = 2t^2 - 8t + 26$$

Aufgabe 1

a) 4) $0 = 2t^2 - 8t + 26$

$$\Leftrightarrow 0 = t^2 - 4t + 13$$

$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$

nach der Formel
aus Fischer S. 69
für Polynome 2. Grades

$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t_{1/2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2}$$

Diese Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.
Allerdings in $\mathbb{C}$. $t_{1/2}$ sind also komplexe Nullstellen.

$$\Leftrightarrow t_1 = 2 + \frac{\sqrt{-36}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{36}}{2} = 2 + \frac{i \cdot 6}{2} = 2 + 3i$$

$$t_2 = 2 - \frac{\sqrt{-36}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{36}}{2} = 2 - \frac{i \cdot 6}{2} = 2 - 3i$$

$$\Leftrightarrow t_4 = \lambda_4 = 2 + 3i$$

$$t_2 = \lambda_5 = 2 - 3i$$

Da diese beiden Nullstellen genau einmal
vorkommen, ist die Vielfachheit $\mu(f; \lambda_4) = 1$
und $\mu(f; \lambda_5) = 1$.

Zusammenfassung:

Nullstellen in $\mathbb{R}$:

$$\lambda_1 = -3 \text{ mit } \mu(f; -3) = 1 \quad \checkmark$$

Nullstellen in $\mathbb{C}$:

$$\lambda_2 = i \text{ mit } \mu(f; i) = 2 \quad \checkmark$$

$$\lambda_3 = -i \text{ mit } \mu(f; -i) = 2 \quad \checkmark$$

$$\lambda_4 = 2 + 3i \text{ mit } \mu(f; 2 + 3i) = 1 \quad \checkmark$$

$$\lambda_5 = 2 - 3i \text{ mit } \mu(f; 2 - 3i) = 1 \quad \checkmark$$

(λ_1 ist auch in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle, aber schon in $\mathbb{R}$ erwähnt)

b) Faktorisieren Sie f über $\mathbb{R}[t]$.

In Aufgabe 1a) wurde f bereits in einige Faktoren zerlegt. Diese übernehme ich hier.

$$f(t) = (t+3)(t^2+1)(t^2+1)(2t^2-8t+26)$$

Dabei setzen sich die Faktoren zusammen aus den Linearfaktoren der reellen Nullstellen und den ~~quadratischen~~ Polynomen 2. Grades, die jeweils die Linearfaktoren der komplexen Nullstelle mit der komplex konjugierten Nullstelle multipliziert sind.

Nun muss noch der letzte Faktor normiert werden.

$$2t^2 - 8t + 26 = 2 \cdot (t^2 - 4t + 13)$$

f über $\mathbb{R}[t]$ faktorisiert ist also:

$$f(t) = 2 \cdot (t+3) \underbrace{(t^2+1)(t^2+1)}_{(t^2+1)^2} (t^2 - 4t + 13)$$

c) Faktorisieren Sie g noch über $\mathbb{C}[t]$.

$$g(t) = (t-2_1)(t-2_2)^2(t-2_3)^2(t-2_4)(t-2_5) \cdot a \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Da jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ in Linearfaktoren zerfällt, welche durch Herausdividieren der Nullstellen entstehen.

(Fischer, S. 67, Korollar + Zeilen davor)

$$g(t) = (t+3) \underbrace{(t+i)(t+i)}_{(t+i)^2} \underbrace{(t-i)(t-i)}_{(t-i)^2} (t-(2+3i))(t-(2-3i)) \cdot 2$$

Die ~~ersten~~ ersten fünf Faktoren sind aus a) bekannt. Die letzten ~~zwei~~ ^{drei} Faktoren ergeben sich aus a) und b).

Lin I*: Übungsblatt 5

NK 2.5

Aufg 2: ~~2.5~~

Aufgabe 2

Gegeben seien mittels ihrer Lösungsmengen die folgenden Geraden in $\mathbb{R}^2$

1. $G_1 := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 1 \}$

2. $G_2 := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3x_2 = 2 \}$

3. $G_3 := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 - 2x_2 = 0 \}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ gilt.

a) Bestimmen Sie die drei Punkte an denen sich jeweils zwei der Geraden schneiden.

Schnittpunkt von G_1 und G_2 :

Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

x ist Schnittpunkt von G_1 und G_2 , wenn

$$x \in G_1 \cap G_2.$$

$$\Rightarrow x \in G_1 \wedge x \in G_2$$

$$\Rightarrow G_1 x = (x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 = 1 \wedge x_1 + 3x_2 = 2$$

x wird nun mittels eines linearen Gleichungssystems ermittelt.

$$\text{I} \quad 2x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{II} \quad x_1 + 3x_2 = 2$$

$$\text{I} - 2\text{II}$$

$$\Rightarrow$$

$$-7x_2 = -3$$

$$\Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

$$\stackrel{x_2 \text{ in II}}{\Rightarrow}$$

$$x_1 + 3 \cdot \frac{3}{7} = 2$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = 2 - \frac{9}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7} \right) \quad \checkmark$$

Der Schnittpunkt von G_1 und G_2 ist $S\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

Schnittpunkt von G_2 und G_3 :

$$x \in G_2 \cap G_3$$

$$\Rightarrow x \in G_2 \wedge x \in G_3$$

$$\Rightarrow \text{für } x \text{ gilt: } x_1 + 3x_2 = 2 \wedge ax_1 - 2x_2 = 0$$

mit folgendem LGS wird x ermittelt:

$$\text{I } x_1 + 3x_2 = 2$$

$$\text{II } ax_1 - 2x_2 = 0$$

$$2\text{I} + 3\text{II}$$

$$\Rightarrow (2+3a)x_1 = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4}{2+3a}$$

$$\stackrel{x_1 \text{ in I}}{\Rightarrow} \frac{4}{2+3a} + 3x_2 = 2$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 2 - \frac{4}{2+3a}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{6+9a}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{4}{2+3a}, \frac{2}{3} - \frac{4}{6+9a} \right) \in G_2 \cap G_3$$

Der Punkt $\left(\frac{4}{2+3a}, \frac{2}{3} - \frac{4}{6+9a} \right)$ ist Schnittpunkt von G_2 und G_3 .

$$= \frac{2a}{2+3a} \quad \checkmark \quad \text{Pun! :)$$

Schnittpunkt von G_1 und G_3 :

Sei x Schnittpunkt von G_1 und G_3

$$\Rightarrow x \in G_1 \cap G_3$$

$$\Rightarrow x \in G_1 \wedge x \in G_3$$

$$\Rightarrow \text{für } x \text{ gilt: } 2x_1 - x_2 = 1 \wedge ax_1 - 2x_2 = 0$$

x wird mittels folgendem LGS ~~gelöst~~ ermittelt:

$$\text{I } 2x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{II } ax_1 - 2x_2 = 0$$

$$\stackrel{2\text{I} - \text{II}}{\Rightarrow} (4-a)x_1 = 2$$

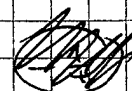
$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{4-a}$$

$$\stackrel{x_1 \text{ in I}}{\Rightarrow} 2 \cdot \frac{2}{4-a} - x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4-a} - 1 = x_2$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{2}{4-a}, \frac{4}{4-a} - 1 \right) \in G_1 \cap G_3$$

↪ vereinfache!



Der Punkt $\left(\frac{2}{4-a}, \frac{4}{4-a} - 1 \right)$ ist Schnittpunkt von G_1 und G_3 .

- b) Bestimmen Sie a so, dass die drei Geraden sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Geben Sie diesen Schnittpunkt an.

Da sich G_1 und G_2 genau in einem ^{jedenfalls bestimmten} Punkt schneiden, muss a so gewählt werden, dass dieser Schnittpunkt auch in G_3 liegt.

$$\text{D.h. } x = \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7} \right) \in G_3$$

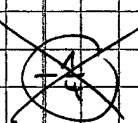
$$\Rightarrow a \cdot \frac{5}{7} - 2 \cdot \frac{3}{7} = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot \frac{5}{7} - \frac{6}{7} = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot \frac{5}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow a = \frac{6 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{6}{5} = 1,2$$

das interessiert hier niemanden!



Der Schnittpunkt von allen 3 Geraden ist $\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7} \right)$ mit $a = 1,2 = \frac{6}{5}$.

- c) Geben Sie zu jeder der Geraden G_i ein Beispiel einer parallelen Gerade an.

Dafür schreibe ich erstmal die Geraden in der Parameterdarstellung auf.

$$G_1: 2x_1 - x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2$$

$$\text{Setze Parameter } \lambda = \frac{x_2}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \lambda$$

$$x_2 = 2\lambda$$

$$\Rightarrow G_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \lambda (-1, 2) \}$$

Parallel zu G_1 ist G_1' mit

$$G_1' = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2) = (1, 0) + \lambda (-1, 2) \}$$

Da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind. → ist Prinzip

folgt folgt

$$\left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$G_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3x_2 = 2\}$$

$$x_1 + 3x_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 - 3x_2$$

$$\text{Setze Parameter } \lambda = x_2 \\ \Rightarrow x_1 = 2 - 3\lambda, x_2 = \lambda$$

$$G_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = (2, 0) + \lambda(-3, 1)\}$$

Parallel zu G_2 ist G_2' :

$$G_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = (3, 0) + \lambda(-3, 1)\}$$

$$G_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 - 2x_2 = 0\}$$

$$\cancel{ax_1 - 2x_2 = 0, \text{ für } a \neq 0}$$

$$\Rightarrow \cancel{x_1 = \frac{2}{a}x_2}$$

~~Setze $\lambda =$~~

$$ax_1 - 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{a}{2}x_1$$

Setze Parameter $\lambda = \frac{1}{2}x_1$

$$\Rightarrow x_2 = a \cdot \lambda$$

$$x_1 = 2\lambda$$

$$G_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = (0, 0) + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}\}$$

Parallel zu G_3 ist G_3' mit

$$G_3' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = (1, 0) + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}\}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)$

Lin I* Übungsblatt 5

Aufgabe 3

Gegeben seien die Punkte $P = (3, 2, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $S = (2, 3, 1)$, $T = (2, 1, 3)$ und $R = (4, 3, 2)$ in $\mathbb{R}^3$.

7/4

a) Bestimmen Sie die beiden Darstellungen für die Gerade durch die Punkte P und Q. Verfahren Sie ebenso mit den Geraden durch Q und S, sowie P und S beziehungsweise T und R.

Gerade durch P und Q: in Parameterdarstellung

$$G_{PQ} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

als Lösungsmenge:

Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ muss als Lösungsmenge in Form von einer Schnittgeraden zweier Ebenen angegeben werden. (Fischer S. 11) Da eine lineare Gleichung in $\mathbb{R}^3$ eine Ebene angibt.

Aus der Parameterdarstellung folgt:

$$\text{I } x_1 = 3 - 2\lambda$$

$$\text{II } x_2 = 2$$

$$\text{III } x_3 = 1 + 2\lambda$$

$$\text{I} + \text{III} : x_1 + x_3 = 4$$

$$\Rightarrow G_{PQ} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 2 \text{ und } x_1 + x_3 = 4 \}$$

Gerade durch Q und S:

$$G_{QS} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$$

Aus der Parameterdarstellung folgt:

$$\text{I } x_1 = 1 + \lambda$$

$$\text{II } x_2 = 2 + \lambda$$

$$\text{III } x_3 = 3 - 2\lambda$$

$$\text{I} - \text{II} : x_1 - x_2 = -1$$

$$2\text{II} + \text{III} : 2x_2 + x_3 = 7$$

$$\Rightarrow G_{QS} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = -1 \text{ und } 2x_2 + x_3 = 7 \}$$

Gerade durch P und S:

$$G_{PS} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1) + \lambda(-1, 1, 0) \}$$

Aus der Parameterdarstellung folgt:

$$\text{I } x_1 = 3 + (-\lambda)$$

$$\text{II } x_2 = 2 + \lambda$$

$$\text{III } x_3 = 1$$

$$\text{I} + \text{II} : x_1 + x_2 = 5$$

$\Rightarrow$

$$G_{PS} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 \text{ und } x_1 + x_2 = 5 \}$$

Gerade durch T und R:

$$G_{TR} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, -1) \}$$

Aus Parameterdarstellung folgt:

$$\text{I } x_1 = 2 + 2\lambda$$

$$\text{II } x_2 = 1 + 2\lambda$$

$$\text{III } x_3 = 3 - \lambda$$

$$\text{I} - \text{II} : x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{II} + 2\text{III} : x_2 + 2x_3 = 7$$

$$G_{TR} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 1 \text{ und } x_2 + 2x_3 = 7 \}$$

b) 2) Gegeben: Richtungsvektoren der Geraden Q-S und P-S und der Punkt S.

Gesucht: Parameterdarstellung der Ebene mit den zwei Richtungsvektoren und dem Punkt S

$$E_S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0) \}$$

Aufgabe 3

b) 2) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden in dieser Ebene liegen.

Da sowohl die beiden Geraden als auch die Ebene den Punkt S enthalten, da sie so konstruiert wurden und jeweils der Richtungsvektor der beiden Geraden, die Richtungsvektoren der Ebene sind, ~~dann~~ liegt jeder Punkt der 1. Gerade in der Ebene, ~~da man bei Punkt S den~~ und jeder Punkt der 2. Gerade auch in der Ebene. Indem jeweils der Parameter vor dem nicht eigenen Richtungsvektor der Gerade hier zeige ich es für eine Gerade ausführlich. Die andere Gerade geht analog.

Mit $\neq$.

$$G_{QS} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}; (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, -2) \}$$

$$E_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}; (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0) \}$$

$$\text{z.z. } G_{QS} \subset E_1$$

d.h. $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$(1, 2, 3) + \lambda(1, 1, -2) = (2, 3, 1) + \mu(-1, 1, 0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{I } 1 + \lambda = 2 + \mu \quad \# -\mu$$

$$\text{II } 2 + \lambda = 3 + \mu$$

$$\text{III } 3 - 2\lambda = 1 - 2\mu$$

$$\text{I} - \text{II} \Rightarrow -1 = -1 - 2\mu$$

$$\Rightarrow 0 = -2\mu$$

$$\Rightarrow 0 = \mu$$

$\mu \text{ in I, II}$

$$\Rightarrow \text{I } 1 + \lambda = 2 + \mu \Rightarrow \lambda = -1 + \mu \quad \text{I}$$

$$\text{II } 2 + \lambda = 3 + \mu \Rightarrow \lambda = -1 + \mu$$

$$\text{III } 3 - 2\lambda = 1 - 2\mu$$

$$\lambda \text{ in III: } 3 - 2\lambda = 1 - 2(-1 + \mu)$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\lambda = 1 + 2 - 2\mu$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\lambda = 3 - 2\mu$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu$$

$$\lambda \text{ in I: } \lambda = -1 + 0 = -1$$

$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung erfüllt ist.

$$\Rightarrow G_{05} \subset E_1$$

(3) Ebene mit Richtungsvektoren von G_{05} und G_{01} und Punkt P

$$E_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1) + \alpha(-1, 1, 0) + \beta(2, 0, 2) \}$$

Ebene mit Richtungsvektoren von G_{01} und G_{05} und dem Punkt Q :

$$Q = (1, 2, 3)$$

Richtungsvektor von G_{01} : $(-2, 0, 2)$

Richtungsvektor von G_{05} : $(1, 1, -2)$

$$E_3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + \lambda(-2, 0, 2) + \mu(1, 1, -2) \}$$

Gerade G_{05} liegt in E_2 ,

da diese alle Punkte sind für die gilt:

$\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta = 0$, und der Punkt $(3, 2, 1)$ in G_{05} liegt.

Gerade G_{01} liegt in E_2 ,

da dies alle die Punkte sind für die gilt:

$\alpha = 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$.

Gerade G_{01} liegt in E_3 ,

da die Menge von G_{01} in E der Menge E_3 liegt, mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu = 0$.

Gerade G_{05} liegt in E_3 ,

wenn $\lambda = 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$.

Somit $\exists \lambda, \mu$ so dass die Gleichung von E_3 mit G_{05} erfüllt ist.

Aufgabe 3

b)

1) Zeigen Sie, dass diese drei Ebenen alle gleich sind.

d.h. z.z.: $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_1 = E_2 = E_3$

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0)\}$$

$$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1) + \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-2, 0, 2)\}$$

$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \delta \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + \lambda(-2, 0, 2) + \delta(1, 1, -2)\}$$

1) z.z. $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$

Dafür kann man zeigen, dass jeweils ^{Richtungs-} 3 Vektoren von 2 Ebenen linear unabhängig sind und das der Aufhängepunkt der einen Ebene auch in der anderen Ebene liegt. Wenn nur das erste gilt, dann sind die Richtungsvektoren linear abhängig, dann sind die Ebenen parallel. Wenn Sie auch gleiche Punkte haben, dann sind sie identisch.

1. z.z.:

1. $\lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0) = (1, 1, 0)$

$\Rightarrow \lambda = 0$ und $\mu = 1$

2. $\lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0) = (-2, 0, 2)$

$\Rightarrow \lambda = -1$ und $\mu = 1$

$\Rightarrow$ Die Richtungsvektoren von E_1 und E_2 sind linear abhängig. Man ist noch zu zeigen, dass die Ebenen nicht nur parallel sondern identisch sind. Dafür reicht es zu zeigen, dass ein Punkt in beiden Ebenen liegt. Man kann dann auch alle Ebenen gleichsetzen.

da die Ebenen auf jeden Fall parallel sind.

Der Punkt $(2, 3, 1)$ liegt in E_1 , da dieser Punkt der Aufhängepunkt ist.

z.z. $(2, 3, 1) \in E_2$, d.h. $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$(2, 3, 1) = (3, 2, 1) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ und } \beta = 0$$

Somit liegt der Punkt auf der Ebene 2.

$$\Rightarrow E_1 = E_2$$

nach zu zeigen: $E_1 = E_3$.

Wieder zu prüfen ist, ob die Richtungsvektoren linear abhängig sind und ob es gemeinsame Punkte gibt.

$$\lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0) = (-2, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \text{ und } \mu = 1$$

$\Rightarrow$ die drei Vektoren sind linear abhängig

$$\lambda(1, 1, -2) + \mu(-1, 1, 0) = (1, 1, -2)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ und } \mu = 0$$

$\Rightarrow$ die drei Vektoren sind linear abhängig

$\Rightarrow E_1$ und E_3 sind parallel.

zu prüfen ist noch, ob sie so gar identisch sind.

z.z. $(2, 3, 1) \in E_3$

Denn $(2, 3, 1)$ ist Element von E_1 , da es der Aufhängepunkt ist.

D.h. $\exists \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, so dass folgende Gleichung gilt

$$(2, 3, 1) = (1, 2, 3) + \gamma(-2, 0, 2) + \delta(1, 1, -2)$$

$\rightarrow$ für $\gamma = 0$ und $\delta = 1$ liegt der Punkt in der Ebene.

$\Rightarrow$ auch E_1 und E_3 sind identisch.

$$E_1 = E_2 \text{ und } E_1 = E_3 \Rightarrow E_2 = E_3$$

$\Rightarrow E_1 = E_2 = E_3$, das heißt alle drei Ebenen sind identisch.

Aufgabe 3

b)

- 8) Wenn Sie die Richtungsvektoren der Geraden durch P_S und T und R benutzen, um eine Ebene durch den Punkt P zu beschreiben, enthält dann diese Ebene auch die Gerade durch T und R ? Was ist der Unterschied zu den vorhergehenden Ebenen und Geraden?

Wenn man die Ebene so oder so beschreiben konstruiert, dann liegt die Gerade durch T und R nicht in der Ebene.

Der Unterschied ist, dass der Punkt P , der Stützvektor von E ist, nicht in beiden Geraden enthalten ist.

Desweiteren liegt der Stützvektor von der Gerade durch T und R nicht in der Ebene E , somit liegt die gesamte Gerade nicht in E .

Richtungsvektor von G_{PS} : $(-1, 1, 0)$

— " — von G_{TR} : $(2, 2, -1)$

Punkt $P = (3, 2, 1)$

$$E_P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1) + \lambda(-1, 1, 0) + \mu(2, 2, -1)\}$$

$$G_{TR} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \alpha \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3) + \alpha(2, 2, -1)\}$$

$$z.z. G_{TR} \not\subset E_P$$

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen $G_{TR} \subset E_P$, dann $\exists \alpha, \lambda, \mu$, so dass gilt:

$$(2, 1, 3) + \alpha(2, 2, -1) = (3, 2, 1) + \lambda(-1, 1, 0) + \mu(2, 2, -1)$$

$\Leftrightarrow$ Folgendes LGS:

$$\text{I } 2 + 2\alpha = 3 - \lambda + 2\mu$$

$$\text{II } 1 + 2\alpha = 2 + \lambda + 2\mu$$

$$\text{III } 3 - \alpha = 1 - \mu$$

$$\text{I} - \text{II} : 1 = 1 - 2\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\lambda \text{ in II: } 1 + 2\alpha = 2 + 2\mu$$

$$\text{III: } 3 - \alpha = 1 - \mu$$

$$\text{II} - 2\text{III} : -5 = 0 \quad \text{⚡}$$

Da

$\Rightarrow$ Die Annahme: $G_{T2} \subset E_4$ ist falsch

$\Rightarrow G_{T2} \not\subset E_4$

$\Rightarrow$ Die Gerade durch T und Z liegt nicht in der Ebene.

Aufgabe 3

c)

Gegeben: Gerade durch $(0,0,0)$ und $(-2,-2,1)$

Gerade durch $T=(2,1,3)$ und $R=(4,3,2)$

Gesucht: Parameterdarstellung mit den
2 Richtungsvektoren und einem Punkt T

$$1. \text{ Richtungsvektor: } \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Richtungsvektor: } \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung:

$$X = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welcher Unterschied fällt auf?

X beschreibt keine Ebene, sondern eine Gerade, da die beiden gegebenen Geraden parallel sind und somit die Richtungsvektoren linear abhängig sind. Bei einer Ebene müssen die zwei Richtungsvektoren allerdings linear unabhängig sein.

Finden Sie eine Ebene, die beide Geraden enthält.

Die Ebene

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

enthält beide Geraden.

Denn man ~~muß~~ ~~nur~~ kann eine Gerade komplett übernehmen und braucht dann noch einen 2. Richtungsvektor, so dass die 2. Gerade auch in der Ebene enthalten ist. Dafür nimmt man einen beliebigen Punkt der einen Geraden und einen beliebigen Punkt der anderen Geraden, zieht diese zu einem Richtungsvektor.

Da

$\Rightarrow$ Die Annahme: $G_{T2} \subset E_4$ ist falsch

$\Rightarrow G_{T2} \not\subset E_4$

$\Rightarrow$ Die Gerade durch T und 2 liegt nicht in der Ebene.

Lin A I*: Übungsblatt 5

Aufgabe 4

- a) Sei die Gerade L_1 in $\mathbb{R}^2$ gegeben mittels der Lösungsmenge

$$L_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 2x_2 = 1 \}.$$

Beschreiben Sie L_1 auch in Parameterdarstellung.

$$L_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 2x_2 = 1 \}$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_2 \}$$

$$\text{Setze Parameter } \lambda := \frac{x_2}{3}.$$

$$\Rightarrow L_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} - 2\lambda \\ x_2 &= 3\lambda \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3} - 2\lambda, 3\lambda\right) \}$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, 0\right) + \lambda(-2, 3) \} \checkmark$$

Parameterdarstellung:

$$L_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, 0\right) + \lambda(-2, 3) \}.$$

- b) Sei L_2 die Gerade L_2 in $\mathbb{R}^2$ gegeben in der Parameterdarstellung

$$L_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = (1, -2) + \lambda(4, 5) \}$$

Beschreiben Sie L_2 auch mittels einer Lösungsmenge.

d.h. in der Form $L_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \}$ $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$

Es gilt nun a_1, a_2, b zu ermitteln.

$$(x_1, x_2) = (1, -2) + \lambda(4, 5)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = (1 + 4\lambda, -2 + 5\lambda)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 + 4\lambda \quad \text{und} \quad x_2 = -2 + 5\lambda$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1 - 1}{4} \text{ und } x_3 = -2 + 5x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 + 5 \cdot \frac{x_1 - 1}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 + \frac{5}{4}x_1 - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{13}{4} + \frac{5}{4}x_1$$

$$\Rightarrow 4x_2 = -13 + 5x_1$$

$$\Rightarrow 5x_1 - 4x_2 = 13$$

$$\Rightarrow L_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 5x_1 - 4x_2 = 13 \right\} \checkmark$$

c) Sei L_3 die Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(1, 0, 1)$ und $(2, 1, 2)$. Sei L_4 die Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(-1, 1, -2)$ und $(0, -2, -1)$. Beschreiben Sie L_3 und L_4 mittels einer ihrer Parameterdarstellungen.

$$L_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) \right\} \checkmark$$

Denn man kann sich einen der beiden Punkte als Aufhängepunkt wählen und den Richtungsvektor der Geraden bekommt man, indem man den einen Punkt minus den anderen rechnet.

$$L_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists \mu \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, -2) + \mu(1, -2, 1) \right\} \checkmark$$

Finden Sie für jede Gerade zwei verschiedene Ebenen, die diese Gerade enthalten. Beschreiben Sie diese Ebenen mittels ihrer Lösungsmengen.

Die Ebenen sind also in der Form:

$$E: a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$$

Damit eine Gerade in dieser Ebene liegt, muss jeder Punkt der Gerade die Ebenengleichung lösen, d.h. die gesamte Gerade muss die Gleichung lösen.

c) Zwei Ebenen für L_3 :

L_3 muss die Ebenengleichung lösen, d.h.

$$\begin{aligned} \text{da aus } L_3 \text{ folgt: } x_1 &= 1 + \lambda \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= 1 + \lambda \end{aligned}$$

gilt:

$$a(1+\lambda) + b(\lambda) + c(1+\lambda) = d$$

$$\Rightarrow a + a\lambda + b\lambda + c + c\lambda = d$$

$$\Rightarrow a + c + (a+b+c)\lambda = d$$

Damit die Lösung nicht von λ abhängt, d.h. damit jeder Punkt der Geraden die Gleichung erfüllt, muss der Koeffizient vor λ Null sein.

$$\Rightarrow \begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ \text{und } a+c &= d \end{aligned} \quad \checkmark \text{ sehr schön allgemein!}$$

Alle Ebenen die diese Bedingungen erfüllen, enthalten die Gerade L_3 .

Gesucht sind nur 2. Nun kann man sich 2 aussuchen indem man 2 Koeffizienten frei wählt und die anderen beiden in Abhängigkeit ausrechnet.
Wähle 1. $a=1$ und $b=2 \Rightarrow c=-3$ und $d=-2$

$$E_{31} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2\} \checkmark$$

Wähle 2. $a=1$ $b=3 \Rightarrow c=-4$ und $d=-3$

$$E_{32} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -3\} \checkmark$$

Zwei Ebenen für L_4 :

Die Erklärungen sind analog zu L_3 .

$$\begin{aligned} L_4: x_1 &= -1 + \mu \\ x_2 &= 1 - 2\mu \\ x_3 &= -2 + \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(-1+\mu) + b(1-2\mu) + c(-2+\mu) &= d \\ \Rightarrow -a + a\mu + b - 2b\mu - 2c + c\mu &= d \\ \Rightarrow -a+b-2c + (a-2b+c)\mu &= d \end{aligned}$$

Damit L_4 in der Ebene liegt, gilt:

$$\begin{aligned} a - 2b + c &= 0 \\ -a + b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

Ebene 1: die L_4 enthält

Wähle $a=1$ und $b=1 \Rightarrow c=1$ und $d=-2$

$$E_{12} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = -2 \} \quad \checkmark$$

Ebene 2: die L_4 enthält

Wähle $a=1$ und $b=2 \Rightarrow c=3$ und $d=-5$

$$E_{12} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \} \quad \checkmark$$

Aufgabe 4

a) Sei E die Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(2, 3, 4)$, $(4, 2, 3)$ und $(3, 4, 2)$.
Beschreiben Sie diese Ebene mittels der Lösungsmenge einer Gleichung.

D.h. die Ebene soll in der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \text{ dargestellt werden.}$$

Da die oben genannten Punkte alle in der Ebene liegen, lösen sie die Ebenengleichung, so dass ein LGS entsteht.

$$\text{I } a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 4 = b$$

$$\text{II } a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 = b$$

$$\text{III } a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 2 = b$$

$$\text{I} - \text{II} \Rightarrow -2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$\text{I} - \text{III} \Rightarrow a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$$

$$\text{II} - \text{III} \Rightarrow -3a_1 + 3a_2 = 0$$

$$\Rightarrow 3a_2 = 3a_1$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1$$

$$a_2 \text{ in I} \Rightarrow a_1 - 2 \cdot a_1 + a_3 = 0$$

$$\Rightarrow -a_1 + a_3 = 0$$

$$\Rightarrow a_3 = a_1$$

$$a_2, a_3 \text{ in I} \Rightarrow 2a_1 + 3 \cdot a_1 + 4 \cdot a_1 = b$$

$$\Rightarrow 9a_1 = b$$

$$\Rightarrow b = 9a_1$$

Dieses Gleichungssystem ist unterbestimmt. Das liegt daran, dass es nicht eine eindeutige Lösung für Darstellung als Lösungsmenge gibt, sondern alle Vielfachen von einer möglichen Gleichung ebenfalls ~~die~~ Lösungen darstellen.

Deshalb kann man einen Koeffizient frei wählen und alle anderen in Abhängigkeit von diesem angeben.

$$\text{Setze } a_1 = 1.$$

$$\Rightarrow a_2 = a_3 = a_1 = 1 \text{ und } b = 9$$

Eine mögliche Lösung für E ist:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 9\} \quad \checkmark$$

sehr gute Darstellung! Lob :)

6/6 IIR