Übungsblatt 6 : Lösungsskizzen

Aufgabe 1

- $A_1 x = b_1 \Rightarrow \text{Lös}(A_1, b_1) = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $A_2 y = b_2 \Rightarrow \text{Lös}(A_2, b_2) = \emptyset$
- $A_3 z = b_3 \Rightarrow \text{Lös}(A_3, b_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{6} - \frac{23}{12}\lambda \\ -\frac{1}{6} + \frac{7}{12}\lambda \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3-\lambda \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 4-\lambda \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) & 4-\lambda \end{array}\right)$$

1) $\lambda \neq 1$ und $\lambda \neq -2$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3\lambda}{(2+\lambda)(1-\lambda)} \\ \frac{2}{\lambda+2} \\ \frac{4-\lambda}{(2+\lambda)(1-\lambda)} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq -2 \right\}$$

2) $\lambda = -2 \Rightarrow$ keine Lösung

3) $\lambda = 1 \Rightarrow$ keine Lösung

b) Gauß wie in a)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 4-\lambda \end{matrix}\right) \overset{\mathbb{Z}_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{matrix}\right)$$

da $2 = 0 \mod 2$

$\lambda^2+\lambda = 0 \mod 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}_2$

1) $\lambda = 0 \Rightarrow x_3$ frei

$x_2 = 1 + x_3 \mod 2$

$$x_1 = 1 - x_2 \underset{\mathbb{Z}_2}{\overset{\uparrow}{=}} 1 + x_2 \mod 2 = x_3 \mod 2$$

Also $\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1+x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z}_2 \right\}$

2) $\lambda = 1 \Rightarrow$ keine Lösung

Aufgabe 3

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -6 & -10 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{mod } 5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$3x_3 = 1 \mod 5 \Rightarrow x_3 = 2$

$x_2 = 1 \mod 5$

$x_1 = 3-2-8 \mod 5 \Rightarrow x_1 = 3$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ mit einer

Variablentransformation, d.h.

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$

- y_3 ist frei
- $5y_2 = 2 - 6y_3 = 2 + y_3 \mod 7$

  $y_2 = 6 + 3y_3$ da $\left\{\begin{array}{l} 5 \cdot 6 = 30 = 2 \mod 7 \\ 5 \cdot 3 = 15 = 1 \mod 7 \end{array}\right.$

- $y_1 = 1 - 2y_2 - 3y_3 = 3 + 5y_3 \mod 7$

Zurück zu den x Variablen

$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 6+3x \\ 3+5x \\ x \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{Z}_7 \right\}$

c) Keine Lösung, denn schon die erste Zeile keine Lösung besitzt, da $2x \equiv 1 \mod 4$ nicht lösbar ist.

Aufgabe 4

a) $\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 = 0 \Rightarrow (\alpha_1\lambda + \alpha_2) v_1 + (\alpha_1 + \lambda\alpha_2) v_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2\lambda = 0 \end{cases}$$ da v_1 und v_2 lin. unabh. sind.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt ∞-viele Lösungen für $1-\lambda^2 = 0$ und eine Lösung ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) sonst. Wir wollen nur eine Lösung haben, also sollte $\lambda \neq \pm 1$ sein.

b) Ähnlich wie in a) kommen wir zum Gleichungssystem

$$k \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1\ 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \lambda & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1+(-1)^{k+1}\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Also $1 + (-1)^{k+1}\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq (-1)^k$ damit $\omega_1, \dots, \omega_k$ lin. unabhängig sind.