Lösungsskizze Blatt 7

1) a) z.z.: $\mathbb{R}$ ist VR über $\mathbb{Q}$.

1) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper

2) $\forall w, v \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Q}$ gilt $v + q \cdot w \in \mathbb{R}$

3) $(p \cdot q)v = p(q \cdot v)$ $\forall p, q \in \mathbb{Q}, v \in \mathbb{R}$. (etc) ...

$\Rightarrow$ laut Definition VR über $\mathbb{Q}$.

b) z.z.: $(p+q) \cdot v \neq pv + qv$!

Körperaddition

$$(\underset{\in\mathbb{Z}_2}{1} \underset{\in\mathbb{Z}_2}{+} 1) \cdot \underset{\in\mathbb{Z}_4}{1} = \underset{\in\mathbb{Z}_2}{(0)} \cdot \underset{\in\mathbb{Z}_4}{1} = 0 \qquad \text{↯} \leftarrow \text{q.e.d.}$$

Vektorraumaddition

$$\underset{\in\mathbb{Z}_2}{1} \cdot \underset{\in\mathbb{Z}_4}{1} \underset{\in\mathbb{Z}_2}{+} 1 \cdot \underset{\in\mathbb{Z}_4}{1} = \underset{\in\mathbb{Z}_4}{1} + \underset{\in\mathbb{Z}_4}{1} = \underset{\in\mathbb{Z}_4}{2}$$

c) α, β sind UVR für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

γ ist kein UVR:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllen $|x_1| \geq |x_2|$

aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt dies nicht!?

2) Einfach nachrechnen, beides sind UVR.

3) $x \in \operatorname{Span}(v, w, z) \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} = r\, v + s \cdot w + t \cdot z \quad , s, r, t \in \mathbb{R}.$

~~also~~ lineares Gl. system in $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Lösen mit Gauß!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & k^2 & k \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right)$$

nicht lösbar, falls

$$k-1 \neq k^2-1$$
$$\iff k \neq k^2$$
$$\iff k = -1 \vee k = +1 \vee k=0 \quad , \text{da } k \in \mathbb{R}.$$

- falls $k=1$: $k^2-1 = k-1 = 0$

  $\Rightarrow$ $0 \cdot t = 0$, also keine Bed. an t !

  LGS für $k=1$ lösbar,

  also $x \in \operatorname{span}(v, w, z)$.

  $$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = z = 0 \cdot v + 0 \cdot w + 1\, z$$

- falls $k=-1$:

  $0 = k^2 - 1 \neq k - 1 = -2$.

  also LGS nicht lösbar!

- falls $k=0$:

  $k^2 - 1 = -1 = k - 1$

  LGS lösbar und

  $$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $x = 0 \cdot v + 0 \cdot w + 1 \cdot z$.

<u>Also</u>: falls $k \notin \{0, 1\}$, dann $x \notin \operatorname{span}(v, w, z)$!

4) $(x + U) \oplus (y + U) = (x + y) + U$

V1:

ist Addition, und V/U ist abelsche Gruppe, da dieses +
die Add. auf dem VR V ist, und dort kommutiert!

(∘) $0 + U \in V/U$ ist der Nullvektor in U.

V2: einfach nachrechnen.

Wichtig: Wohldefiniertheit der Multiplikation:

$\cdot \; (\lambda, (x+U)) \longmapsto \lambda \cdot x + U \quad , \lambda \in K$

ist dies unabhängig von Repräsentanten?.

Sei x, y verschiedene Repräsentanten, d.h.
sei x bel und $y \in x + U$, ie. $y = x + u$, $u \in U$

dann gilt $x + U = y + U$.

$\lambda(x + U) = \lambda x + U$

$\lambda(y + U) = \lambda y + U = \lambda(x+u) + U$

$= \lambda x + \underbrace{\lambda u + U}_{= U}$

hier nochmal argumentieren? $= \lambda x + U$