Übungsblatt 8 : Lösungsskizzen

Aufgabe 1

a) α) Wir haben das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

1: Pivot; $\underbrace{-1\ 2\ -3\ 1}_{\text{frei}}$

Also

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } x = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \right\}$$

Indem man ein λ_i auswählt, $\lambda_i = 1$ setzt und die restlichen λ_j zu Null setzt kriegt man 4 linear unabhängige Vektoren die V aufspannen. D.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ bilden eine Basis für V.

β) • $3t^3 - 2t^2 - 1 = 2(t^3 - t^2 - 1) + (t^3 - t + 1) + t$

Man darf also $3t^3 - 2t^2 - 1$ aus dem Erzeugendensystem rauswerfen.

. Die übrigen 4 ~~Vektoren~~ Polynome sind lin. unabhängig, weil

$$\begin{array}{l} t^3-t+1 \rightarrow \\ t^3-t^2-1 \rightarrow \\ t \rightarrow \\ t^2-2 \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ $\Rightarrow$ es gibt nur eine Lösung

des lin. Gleichungssystem

$$\alpha_1(t^3-t+1)+\alpha_2(t^3-t^2-1)+\alpha_3 t+\alpha_4(t^2-2)=0$$

nämlich $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = 0$.

γ) $(3t^2+1) + 2(t^2+t) + 3t = 1 \mod 5$

$\Rightarrow$ Wir können $3t^2+1$ aus dem Erzeugendensystem rauswerfen

Die Polynome $1, t, t^2+t$ sind lin. unabhängig und bilden eine Basis.

δ) wie in α)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } x = \begin{pmatrix} 3/2(\lambda_2-\lambda_1) \\ 2(\lambda_1-\lambda_2) \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis: $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) • $S_n(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum, weil

1) $S_n(\mathbb{R}) \ni 0$ (die Nullmatrix)

2) $(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)^t = \lambda_1 B_1^t + \lambda_2 B_2^t$

$= \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$ für $B_i \in S_n(\mathbb{R}), \lambda_i \in \mathbb{R}$

• Gleich für $A_n(\mathbb{R})$

<u>Basen:</u> Wir definieren die $n\times n$ Matrizen E_{ij} folgendermassen:

- $(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & i=k \text{ und } j=l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Zum Beispiel, für $n=2$ gilt $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Es gilt $E_{ij}^t = E_{ji}$

<u>Dann</u>

- $\{E_{ii} : i=1,\dots,n\} \cup \{E_{ij}+E_{ji} : \begin{smallmatrix} i,j=1,\dots,n \\ i<j \end{smallmatrix} \}$ ist eine Basis für $S_n(\mathbb{R})$
- $\{E_{ij}-E_{ji} : \begin{smallmatrix} i,j=1,\dots,n \\ i<j \end{smallmatrix}\}$ ist eine Basis für $A_n(\mathbb{R})$

<u>Dimension:</u> Wir zählen einfach die Basiselemente

- Für $S_n(\mathbb{R})$: $\dim S_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
- Für $A_n(\mathbb{R})$: $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

(weil $\begin{smallmatrix} i=1,\dots,j-1 \\ j=1,\dots,n \end{smallmatrix}$ also für j fix gibt es $(j-1)$ i.
Dann gibt es $\sum_{j=1}^{n}(j-1) = \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$ Paare von Indizes (ij))

Aufgabe 2

a) Wir nehmen $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

Zu zeigen: v_1, v_2, w_1, w_2, w_3 sind lin. unabhängig

<u>Beweis.</u>

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -23 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 = 0$

... Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

b) $\sum_{i=1} \alpha_i v_i = 0$ (Die v_i sind lin. abhängig falls die a,b,c,d,e lin. abhängig sind. Wir nehmen an, dass a,b,c,d,e lin. unabh. sind. Dann identifizieren wir kanonisch a mit e_1, b mit e_2, usw. Daraus bekommen wir die Koeffizientenmatrix.)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind lin. abhängig

Aufgabe 3

a) · Wir wenden den Gaußschen Algorithmus auf dem Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ an.

· $k \updownarrow \underbrace{(A \mid 0)}_{n} \longrightarrow (\ast \mid 0)$

· Die Dimension von V_A ist gleich der Anzahl freier Elementen im Gleichungssystem $A \cdot x = 0$

$= n - \#$ Pivotelemente $= n -$ Spaltenrang(A)

$= n -$ Zeilenrang(A)

b) 1) Sei $\mathcal{U}$ ein beliebiger U.V.R von V der Dimension k. Wir nehmen an $0 \leq k < n = \dim V$, denn aus $k = n$ folgt $\mathcal{U} = V$.

Sei $(u_1 \dots u_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$.

Def: $A_{\mathcal{U}} := (u_1 \dots u_k)^t$ ist eine $k \times n$ Matrix.

A_u hat Rang k per Konstruktion.

. Nach dem Gaußschen Algorithmus hat $Lös(A_u, 0)$ des linearen Gleichungssystem $A_u \cdot x = 0$ $(n-k)$ freie Parameter.

Sei $v_1 \dots v_{n-k}$ eine Basis von $Lös(A_u, 0)$

Def: $B_u := (v_1, \dots, v_{n-k})^t$

Es gilt dann per Konstruktion, dass

$B_u \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

. Wir können $\mathcal{U}$ schreiben als

$$\mathcal{U} := \{ x \in V \mid B_u \cdot x = 0 \}$$

2) $H = \{ x \in V \mid B_H \cdot x = 0 \}$

$\mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} \mid B_u \cdot x = 0 \}$

wo B_H eine $1 \times n$ Matrix ist

und B_u eine $(n-k) \times n$ Matrix $(k = \dim \mathcal{U})$

Wir definieren $B := \begin{pmatrix} B_u \\ B_H \end{pmatrix}$. Dies ist eine $(n-k+1) \times n$ Matrix.

Der Rang von B_U ist nach 3a) gleich $n-k$.
Der Rang von B_H ist gleich 1.
Da $U \not\subseteq H$ ~~muss~~ kann die ~~Zeile~~ ~~B_H~~ Zeilenmatrix B_H keine Linearkombination aus den Zeilen von B_U sein.
Also hat die Matrix B linear unabhängige Zeilen $\Rightarrow \text{Rang}(B) = n-k+1$

Def: $U' = \{x \in V \mid B \cdot x = 0\}$

$U' = U \cap H$ da man U' umschreiben kann als

$$U' = \{x \in V \mid B_U \cdot x = 0 \wedge B_H \cdot x = 0\}$$
$$= \{x \in V \mid B_U \cdot x = 0\} \cap \{x \in V \mid B_H \cdot x = 0\}$$
$$= U \cap H$$

Nach 3a) gilt: $\dim U' = \dim U \cap H$
$$= n - \text{Rang}(B) =$$
$$= n - (n-k+1) = k-1$$
$$= \dim U - 1$$
$\square$

Aufgabe 4: Betrachte die $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen

$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b_k} \log(p_k)$ wo $N \geq 1$ beliebige natürliche Zahl ist.
$p_k \in \mathbb{P}$
$b_k \neq 0$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b_k} \log(p_k) = \frac{\sum_{k=1}^{N} c_k \log(p_k)}{\prod_{k=1}^{N} b_k}$$ mit $c_k = a_k \prod_{l \neq k} b_l$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{N} c_k \log(p_k)$$
$$= \log\left(\prod_{k=1}^{N} p_k^{c_k}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{N} p_k^{c_k} = 1$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung jedes $n \in \mathbb{N}$ als Produkt von Primzahlen folgt, dass

$c_1 = \ldots = c_N = 0$

$\Rightarrow a_1 = \ldots = a_N = 0$

$\Rightarrow \log(p_k)$ $k = 1 \ldots N$ sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig für beliebige N

$\Rightarrow$ Es gibt keine endliche Erzeugende Familie.

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$