Lösungen zu Blatt 9

1a)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \neq 0 \neq c$$

<u>$\ker f = ?$</u> $\quad Ax = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 0 & bc-ad & 0 \end{array}\right)$$

<u>Fallunterscheidung $ad - bc = 0$ bzw $\neq 0$.</u>

<u>Fall $\neq 0$.</u> ~~denn~~ $x_2 = 0$

$\Rightarrow a x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

also $\ker f = \{0\}$. $\quad \dim \ker f = 0$

<u>Fall $= 0$:</u> dann $a x_1 + b x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{b}{a} x_2 \quad (a \neq 0 !?)$ $\quad$ Da $a \neq 0$ und damit $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

also $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ <u>$\dim \ker f = 1$</u>

<u>Bild $\operatorname{Im} f$:</u> <u>Im Fall $ad - bc \neq 0$</u> $\quad \dim \ker f = 0$,

also folgt ~~aus~~ mittels der Dimensionsformel

$\dim \operatorname{Im} f = 2 - 0 = 2$.

Da $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ folgt aus Dimensionsgründen

<u>$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.</u>

<u>Fall $= 0$:</u> Aus Dimensionsformel <u>$\dim \operatorname{Im} f = 1$</u>

$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$, bleibt noch zu

überprüfen, dass $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ lin. abh. sind.

dies gilt, da $\quad d \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + (-c) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0$?

1b)

Fallunterscheidungen

Fall 1: $a = 0 = b$,

Dann $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

Fall 2: $a = 0 \neq b$

Dann

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/b \end{pmatrix}$, Gerade senkrecht zur Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

Fall 3: $a \neq 0 \neq b$

$$Ax = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{array}{c} 1/a \cdot \mathrm{I} \\ 1/b \cdot \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ a & b & 1 \end{array}\right)$$

also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} 1/a \\ 0 \end{pmatrix}$,

Gerade senkrecht zur Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

f ist also die Projektion auf die Gerade $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ mit der Streckung um einen Faktor, den man in 1c) berechnet.

1c) $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot (a^2 + b^2)$. Um also $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ als Fixpunkt zu erhalten nehme man die Matrix $\frac{1}{a^2+b^2} A$.

(Das geht, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, falls $a = b = 0$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bereits ein Fixpunkt, siehe oben!)

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto A \cdot x$ (4 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ges Bild, Kern (1P, 1P)

Basis jeweils $\to$ 1P

Dimension jeweils $\to$ 1P

$$(A,0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \text{Lös}(A,0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0,0,0)\}$

$\Rightarrow \underline{\text{Ker}(f)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0,0,0)\}$ 1

$\underline{\dim(\text{Ker}(f))} = 0$ ½

$\underline{\text{Basis}_{\text{Ker}}}$ $\{\}$ ½ [0 ist nicht linear unabhängig (zu keinem anderen Vektor)]

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 : Ax = y\}$

$$\Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{\text{Im}(f)} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 1

$\underline{\dim(\text{Im}(f))} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 0 = 3$ ½

$\underline{\text{Basis}_{\text{Im}}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ½

3) <u>Erste Beobachtung</u>

$\dim U_i = 1 \quad \forall i \in \{0,1,\dots,n\}$, und $\dim U = n-1$.

Nach Dimensionsformel ist ~~$\dim U_j \oplus U$~~

$$\dim(U_j + U) = n \iff \dim U \cap U_j = 0.$$

In dem Fall ist dann $U_j + U$ aus dimensionsgründen

gleich $\mathbb{R}^n$.

Es ist also nur zu zeigen, dass $U_j \cap U = \{0\}$ ist.

Dazu genügt es, jeweils einen Basisvektor für U_j zu wählen,

und zu zeigen, dass dieser nicht in U liegt.

Für U_0 gilt $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in U_0$, aber $\sum v_i = n \neq 0$ also $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \notin U$.

Für $j \neq 0$ ist $v = \begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix} \in U_j$ mit $v_i = 0 \; \forall i \neq j$

und $v_j = 1$,

aber $\sum v_i = 1 \neq 0$ also $v \notin U$. $\square$

4)

<u>Vorr:</u> $\dim W = n$

$\dim U = n-1$

$V \oplus U = W$, also insbesondere $\dim (V \cap U) = 0$

$(b_1, \dots, b_{n-1})$ Basis von U, (a) Basis von V

<u>Z:</u> Für alle $\lambda_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist

$(a, b_1 + \lambda_1 a, \dots, b_{n-1} + \lambda_{n-1} a)$ Basis von W

Aus Dimensionsgründen reicht es, zu zeigen dass diese Vektoren linear unabh. sind

<u>Bew:</u> $\mu_0 a + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (b_i + \lambda_i a) = 0 \qquad (*)$

$= \underbrace{\left(\mu_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i\right)}_{=:\tilde{\mu}} a + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i b_i$

$= 0$ genau dann, wenn

$\mu_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \wedge \tilde{\mu} = 0$,

da $(a, b_1, \dots b_{n-1})$ Basis von W ist.

Aber dann ist $\tilde{\mu} = \mu_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 0 \cdot \lambda_i = \mu_0 = 0$.

Also ist $(*)$ genau dann erfüllt, wenn alle $\mu_i = 0$.

also ist die lin unabh. gezeigt. $\square$