Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 1, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 27.10. um 13.15 Uhr

1 [Nachtrag zu Aussagenlogik und Wahrheitstafeln:] In der Vorlesung wurden die Wahrheitstafeln für und, oder und nicht eingeführt. Wir definieren nun

$$\text{die Implikation } A \Rightarrow B \text{ durch } \neg A \vee B,$$

$$\text{und die Äquivalenz } A \Leftrightarrow B \text{ durch } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

a) Stellen Sie die Negationen $\neg(A \Rightarrow B)$ und $\neg(A \Leftrightarrow B)$ ebenso dar.

b) Geben Sie die Wahrheitstafeln für $A \Rightarrow B$ und $A \Leftrightarrow B$ sowie deren Negationen an.

(4 Punkte)

2 [Quantoren und Negation:] In der Vorlesung wurden Quantoren sowie Aussagenlogik behandelt. In dieser Aufgabe sollen Sie die umgangssprachlich gegebenen Aussagen mit Hilfe von Quantoren schreiben, dann negieren und wieder in Umgangssprache ausdrücken, um so die gegebene Aussage zu negieren.
Beispiel: $S(x)$ sei die Aussage "x ist sterblich", M Sei die Menge der Menschen.

$$\begin{array}{rl} & \text{Alle Menschen sind sterblich} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in M \;\; S(x) \\ \Leftrightarrow \neg & \exists x \in M \;\; \neg S(x) \\ \Leftrightarrow \neg & \text{Es gibt einen Menschen, der nicht sterblich ist} \end{array}$$

Verfahren Sie ebenso bei den folgenden Aussagen. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage oder ihre Negation wahr sind.

a) Alle Studenten (in dieser Vorlesung) sind im ersten Semester.

b) Es gibt einen Studenten, der nicht Mathematik studiert.

c) Es gibt Leben außerhalb unseres Sonnensystems.

d) Jeder Mensch besitzt eine Mutter und es gibt einen Menschen, der einen Vater hat.

e) Alle natürlichen Zahlen sind positiv.

f) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $x - n \in \mathbb{N}$.

g) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}$ mit $x - n \in \mathbb{N}$.

h) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}$ gilt $x - n + y \in \mathbb{N}$.

(4 Punkte)

3 [Abbildungen, Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:]
In der VL wurden Abbildungen sowie die Begriffe Injektivität etc eingeführt.

a) Formulieren Sie die Negationen der Bedingungen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität in formaler Schreibweise und in Umgangssprache. (Ähnlich wie in Aufgabe 2)

b) Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung von A nach B, wobei

(1) $A \subset B \wedge A \neq B$.

(2) A beliebig, $B := \{c\}$.

(3) $B \subset A \wedge A \neq B$.

In welchen Fällen kann f surjektiv, injektiv oder bijektiv sein? Beweisen Sie Ihre Antwort! Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

c) Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung von A nach B. Zu jeder Teilmenge $C \subset A$ ist das *Bild* von C definiert als $f(C) := \{b \in B \ : \ \exists a \in C \text{ mit } f(a) = b\}$. Entsprechend ist für $D \subset B$ das *Urbild* von D definiert durch $f^{-1}(D) := \{a \in A \ : \ f(a) \in D\}$. Zeigen Sie:

(1) Für $C, D \subset B$ gilt $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ und $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(2) Für $C, D \subset A$ gilt $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$. Finden Sie ein Beispiel mit $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

(3) Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig (d.h. für alle möglichen Mengen A, B und Abbildungen $f : A \to B$ und Teilmengen $C \subset A$, $D \subset B$):

(i) $C \subset f^{-1}(f(C))$,

(ii) $C \supset f^{-1}(f(C))$,

(iii) $D \subset f(f^{-1}(D))$,

(iv) $D \supset f(f^{-1}(D))$?

Inwieweit ändert sich die Antwort, wenn f surjektiv, injektiv oder bijektiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

(8 Punkte)

4

Seien A, B nichtleere Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to A$ injektive Abbildungen. Für jede Teilmenge $C \subset A$ sei die Menge $F(C)$ definiert durch

$$F(C) := A \setminus g(B \setminus f(C)).$$

Angenommen, es gibt eine nichtleere Teilmenge $C \subset A$ mit $F(C) = C$. Zeigen Sie, dass dann eine bijektive Abbildung von A nach B existiert.

Zusatzfrage: Wie könnte man zeigen, dass solch eine Menge $C \subset A$ mit $F(C) = C$ existiert?

(4 Punkte)