Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE I* WS 2011/12

ÜBUNGSBLATT 10, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 19.01. um 13.15 Uhr

1 [Quotientenvektorräume]

a) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ definiert durch

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_{n-1}(x)) \ ,$$

mit $\phi_k(x) = x_k - x_{k+1}$ für $k = 1, \ldots, n-1$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum mit der Basis $(e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n)$, wobei $(e_1, \ldots e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Finden Sie einen expliziten Isomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n/\mathrm{Ker}(\phi) \to U$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \ .$$

Seien $U := \mathrm{span}(e_1)$, $V := \mathbb{R}^2/U$ und $\rho : \mathbb{R}^2 \to V$ die kanonische Abbildung auf den Quotientenvektorraum V. Bestimmen Sie die Abbildung $\bar{f} : V \to V$ so, dass $\rho \circ f = \bar{f} \circ \rho$.

c) Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot x \ .$$

α) Bestimmen Sie eine Basis (u_1, u_2, v_1, v_2) von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis (w_1, w_2, w') von $\mathbb{R}^3$, für die gilt: $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{span}(v_1, v_2)$, $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}(w_1, w_2)$ und $F(u_i) = w_i$.

β) Geben Sie für $x \in \mathrm{Im}(F)$ eine Parametrisierung der Faser $F^{-1}(x)$ an und zeigen Sie, dass $F^{-1}(x)$ genau einen Schnittpunkt mit $U := \mathrm{span}(u_1, u_2)$ hat.

γ) Sei $\rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/\mathrm{Ker}(F)$, $x \mapsto x + \mathrm{Ker}(F)$ die kanonische Abbildung auf den Quotienten. Bestimmen Sie die Abbildung $\bar{F} : \mathbb{R}^4/\mathrm{Ker}(F) \to \mathrm{Im}(F)$ mit der Eigenschaft $F = \bar{F} \circ \rho$ und zeigen Sie, dass $\bar{F}$ ein Isormorphismus ist.

(7 Punkte)

2 [Projektion, Direkte Summen] Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft

a) $\phi \circ \phi = \phi$. Zeigen Sie:

α) $V = \mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\phi)$,

β) $\phi(u_1 + u_2) = u_1$, für alle $u_1 \in \mathrm{Im}(\phi)$ und $u_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

b) $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$, wobei id_V die Identitätsabbildung auf V bezeichne. Zeigen Sie, dass es Untervektorräume U_1 und U_2 von V mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $V = U_1 \oplus U_2$,
- $\phi(u_1 + u_2) = u_1 - u_2$ für alle $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildungen $\phi \pm \mathrm{id}_V$.

(4 Punkte)

3 [Lineare Gleichungssysteme]

a) Finden Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{11}(-1, 3, 7, -2)$ ist eine Lösung. Dies müssen Sie nicht zeigen.

b) Bestimmen Sie eine Matrix B so, dass die Lösung des Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ beliebig}$$

sich schreiben lässt als $x = B \cdot b$. Hinweis: Bringen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus alle Pivotelemente auf 1 und alle andere Einträge auf Null.

c) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = \lambda x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

nicht nulldimensional ist. Geben Sie die zugehörigen Lösungsmengen an.

(5 Punkte)

4 [Exakte Sequenzen] Für $i = 1, \ldots, n$ seien V_i endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und seien $f_i : V_i \to V_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, lineare Abbildungen:

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} V_n \ .$$

Wir nennen diese Sequenz von Abbildungen *exakt*, falls $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$. Wir bezeichnen mit 0 einen nulldimensionalen Vektorraum $\{\vec{0}\}$ (also ein Vektorraum der nur von einem Nullvektor aufgespannt wird). Die einzige lineare Abbildung, die 0 mit einem anderen Vektorraum verbinden kann ist die Nullabbildung und bei einer Sequenz werden entsprechende Pfeile nicht beschriftet.

a) Bestimmen Sie den Vektorraum V so, dass die Sequenz $0 \to V \to 0$ exakt wird.

b) Sei die exakte Sequenz

$$0 \to V \xrightarrow{f} W \to 0 \ ,$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus sein muss.

c) Betrachten Sie die exakte Sequenz

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \to 0$$

und zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim V_{n-i} = \dim V_n - \dim V_{n-1} + \dim V_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} \dim V_1 = 0.$$

(4 Punkte)