Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 11, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 26.01. um 13.15 Uhr

1 [Matrizengleichungen] Es seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie die Lösungsmengen der Matrizengleichungen $A \cdot X = B$ und $Y \cdot A = C$.

(4 Punkte)

2 [Basen, Matrizendarstellungen]

a) Sei C die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x) = C \cdot x$. Finden Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sei n eine natürliche Zahl und $V := \{f \in \mathbb{R}[t] : \deg f \leq n\}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Sei die Abbildung θ definiert durch

$$\theta : \; V \longrightarrow V, \quad f \mapsto f',$$

wobei wir mit f' dasjenige Polynom bezeichnen, das durch Ableitung von f nach t entsteht. Dazu sei noch $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und die Abbildung η gegeben durch:

$$\eta : \; V \longrightarrow V, \quad \eta(f)(t) := f(t+a).$$

Hier ist $t+a$ für $a \in \mathbb{R}$ als Polynom in $\mathbb{R}[t]$ zu verstehen. Zeigen Sie, dass θ und η lineare Abbildungen sind und bestimmen Sie jeweils deren Matrixdarstellungen bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, t, \ldots, t^n)$ von V.

(5 Punkte)

3 [Koordinatensysteme]

a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $(k_1, \cdots, k_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Sei zudem V ein beliebiger $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit der Basis $B_V = (v_1, \cdots, v_n)$ und sei $\Phi_{B_V} : \mathbb{K}^n \to V$ der Isomorphismus definiert durch

$$\Phi_{B_V}(e_i) = v_i \text{ für } i = 1, \ldots, n,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ ist. Wir sagen, dass Φ_{B_V} das von B_V erzeugte Koordinatensystem ist. Zeigen Sie, dass $(\Phi_{B_V}(k_1), \cdots, \Phi_{B_V}(k_n))$ eine Basis von V ist.

b) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 3$ fest, und sei W der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner m in der Variablen t. Für W nehmen wir die Basis $B_W = (w_1, \ldots, w_m)$ mit

$$w_j = \begin{cases} t-2, & j = 2 \\ t^{m-1} - t^2, & j = m \\ t^{j-1}, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Sei $\Phi_{B_W} : \mathbb{R}^m \to W$ das von B_W erzeugte Koordinatensystem. Bestimmen Sie eine Basis $B_W^* = (w_1^*, \cdots, w_m^*)$ von W mit den Eigenschaften

$$w_1^* = \Phi_{B_W}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad w_2^* = \Phi_{B_W}\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\m\end{pmatrix}, \quad w_3^* = \Phi_{B_W}\begin{pmatrix}m-1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

4 [Matrizenmultiplikation, untere Dreiecksmatrizen] Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n,m)$, $n, m \in \mathbb{N}$ heißt *untere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0\ \forall i < j$, und *echte untere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0\ \forall i \leq j$.

a) Zeigen Sie unter ausschließlicher Verwendung der Definition der Matrizenmultiplikation, dass das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.

b) Sei $A \in M(n,m)$ eine echte untere Dreiecksmatrix. Bestimmen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wohldefiniertheit von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Sei $A \in M(n,m)$ eine beliebige echte untere Dreiecksmatrix, die der Bedingung in b) genügt. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A^k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ eine endliche Menge ist.

(6 Punkte)