Übungsblatt 12, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 02.02. um 13.15 Uhr

1 [Matrixmultiplikation und Elementarmatrizen] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Formen Sie die Matrix A mit Hilfe von Elementarmatrizen so um, dass die Einheitsmatrix herauskommt. Wenden Sie parallel exakt die selben Umformungen auf die Einheitsmatrix an, das Ergebnis sei mit B bezeichnet.

b) Berechnen Sie das Produkt von A und B. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) In der Vorlesung wurden die Elementarmatrizen $Q_i^j(\lambda)$, P_i^j und $S_i(\lambda)$ definiert. Zeigen Sie:

$$Q_i^j(\lambda) = S_j\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot Q_i^j(1) \cdot S_j(\lambda), \quad \text{und} \quad P_i^j = Q_j^i(1) \cdot Q_i^j(-1) \cdot Q_j^i(1) \cdot S_j(-1).$$

(5 Punkte)

2 [Koordinatentransformation] Gegeben seien für $\mathbb{R}^3$ die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Ferner sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die lineare Fortsetzung von $f : e_i \mapsto e_{4-i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ für die Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie $T_\mathcal{B}^\mathcal{A}$ sowie $M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(f)$.

b) In der Vorlesung wurde definiert, wann zwei Matrizen äquivalent beziehungsweise ähnlich genannt werden. Zeigen Sie, dass die so definierten Relationen tatsächlich Äquivalenzrelationen sind.

(5 Punkte)

3 [Matrixmultiplikation und Lineare Abbildungen] Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$M_\mathcal{E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

a) Berechnen Sie die Matrix $M_\mathcal{E}(f^2)$ der linearen Abbildung $f^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (f \circ f)(x)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

b) Sei die Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie $M_\mathcal{B}(f)$

c) Bestimmen Sie eine Formel für $M_{\mathcal{E}}(f^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Beweisen Sie diese Formel.)

(6 Punkte)

4

Für $A \in M(n \times m, \mathbb{K})$ sei die Abbildung $\tilde{f}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch $x \mapsto x \cdot A$ definiert.

a) Zeigen Sie: Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt $\operatorname{Ker} \tilde{f}_A = \operatorname{Ker} \tilde{f}_{AA^T}$.

b) Benutzen Sie dies, um für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu folgern, dass $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} AA^T$.

c) Laut der deutschen Wikipedia Seite gilt dies für beliebige Matrizen. Finden Sie ein Gegenbeispiel!

(4 Punkte)