Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 13, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 09.02. um 13.15 Uhr

1 [Determinanten] Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} E_i^{n+1-i}, \quad D = \begin{pmatrix} -20 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & -20 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -20 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & -20 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & -20 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -20 \end{pmatrix},$$

wobei E_i^j die Elementarmatrix (definiert im Fischer 1.5.1) der Grösse $n \times n$ ist. *(5 Punkte)*

2 [Regel von Sarrus] Finden Sie eine Matrix $A \in M(4\times 4, \mathbb{R})$, sodass das Analogon der Regel von Sarrus (siehe Seite 195 im Fischer) nicht $\det(A)$ ergibt. *(3 Punkte)*

3 [Spur von Matrizen]

a) Sei die *Spur* definiert als $\mathrm{Sp} : M(n \times n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit

$$\mathrm{Sp}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ ,$$

wobei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{K})$. Zeigen Sie:

α) $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)\ \forall\ A, B \in M(n \times n; \mathbb{K})$.

β) $\mathrm{Sp}(A_1A_2 \cdots A_{m-1}A_m) = \mathrm{Sp}(A_mA_1A_2 \cdots A_{m-1})\ \forall\ A_1, \ldots, A_m \in M(n \times n; \mathbb{K})$.

γ) $\mathrm{Sp}(SAS^{-1}) = \mathrm{Sp}(A)\ \forall\ A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ und $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

b) Zeigen Sie, dass es unter Verwendung der Regel $\det(SAS^{-1}) = \det(A)$ keine Matrix S gibt mit der Eigenschaft

$$S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{K} \ .$$

c) Sei die Exponentialfunktion für $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ definiert durch

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \ .$$

Diese Potenzreihe konvergiert für alle $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$. Wir nehmen an, dass es eine Matrix S gibt, sodass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Zeigen Sie:

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Sp}(A)} \ .$$

(6 Punkte)

4 [Determinanten von schiefsymmetrischen und hermiteschen Matrizen]

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ eine *schiefsymmetrische* Matrix, d.h. mit der Eigenschaft $A^t = -A$. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) = 0$ folgt. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A^t) = \det(A)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil a) für schiefsymmetrische Matrizen in $M(n \times n; \mathbb{Z}_2)$ nicht stimmt.

c) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine *hermitesche* Matrix, d.h. mit der Eigenschaft $a_{ij}^* = a_{ji}$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$, wobei a^* die zu a komplex konjugierte Zahl ist. Zeigen Sie, dass dann $\det(A)$ eine reelle Zahl ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A^*) = (\det(A))^*$ gilt.

(6 Punkte)