Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 2, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 3.11. um 13.15 Uhr

1 [Abbildungen, Verknüpfung:] Seien X, Y, Z, A, B, C, und D nicht leere Mengen.

a) Seien die Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h := g \circ f$, also $h : X \to Z$ gegeben.

1) Beweisen Sie, dass aus h injektiv folgt, dass f injektiv ist.
2) Beweisen Sie: h surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv.
3) Gilt: h surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv? Gilt: h injektiv $\Rightarrow$ g injektiv? Wenn nicht, dann geben Sie Gegenbeispiele an.

b) Es seien vier Mengen A, B, C und D zusammen mit drei Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ gegeben. Beweisen Sie, dass aus der Bijektivität von $g \circ f$ und $h \circ g$ folgt, dass f, g und h alle bijektiv sind.

(5 Punkte)

2 [Graphen:]

a) Seien $X := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $Y := \{0, 5, 10, 15\}$, sowie $A := X \times Y = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$ und $B := \{x + y|x \in X, y \in Y\}$ gegeben. Sei dann $R \subset A \times B$ definiert durch

$$R := \{((x, y), x + y)|x \in X, y \in Y\} \ .$$

Zu zeigen ist, dass es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, so dass R der Graph von f ist.

b) Sei X eine nichtleere Menge. Welche Eigenschaften muss X haben, damit $X \times X$ der Graph einer Abbildung von X nach X ist?

(4 Punkte)

3 [Äquivalenzrelationen:] Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind. Wenn nicht, warum?

1) $x \sim y$, wenn x und y Menschen mit dem gleichen Geburtstag sind.

2) $x \sim y$, wenn x und y Geschwister sind.

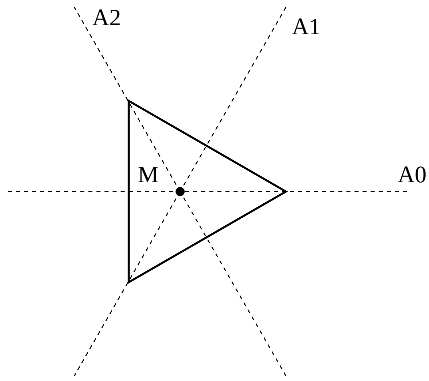
3) Seien zwei nicht leere Mengen X, Y und eine Abbildung $f : X \to Y$ gegeben. Für $x_1, x_2 \in X$ sei $x_1 \sim x_2$, wenn $f(x_1) = f(x_2)$.

4) Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit der Relation $n_1 \sim n_2$, wenn es einen gemeinsamen Teiler von n_1 und n_2 gibt, der grösser Eins ist.

5) $M := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(p_1, n_1) \sim (p_2, n_2)$, wenn

$$\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2} \ .$$

(5 Punkte)



4 [Diedergruppe, Permutationsgruppe:]

a) Sei D_3 die Diedergruppe des regulären Dreiecks (siehe Fischer, Seite 53).

1) Für $k = 0, 1, 2$ bezeichnen wir mit S_k die Spiegelungen (siehe Bild) an den Geraden Ak und mit R_k, die Rotationen im Gegenuhrzeigersinn mit Zentrum M und Winkel $\frac{2\pi}{3}k$, also k mal 120 Grad. Insbesonders ist R_0 die Identität. Füllen Sie (mit Begründung) die Verknüpfungstafel von D_3 aus.

$\times$	R_0	R_1	R_2	S_0	S_1	S_2
R_0	R_0	R_1				
R_1						
R_2						
S_0	S_0			R_0	R_2	R_1
S_1						
S_2						

2) Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $N \subset G$ heisst Normalteiler, falls

$$gng^{-1} \in N \qquad \forall n \in N \text{ und } \forall g \in G \; .$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Rotationen in D_3 einen Normalteiler bildet.

b) Seien drei Taschen gegeben, die jeweils ein Objekt enthalten. Sei die Abbildung σ_{12} die Vertauschung des Objekts in der Tasche 1 mit dem Objekt in der Tasche 2. Sei σ_{23} ähnlich definiert. Sei noch id die Identitätsabbildung. Beweisen Sie:

1) $\sigma_{12} \circ \sigma_{12} = id$ und $\sigma_{23} \circ \sigma_{23} = id$,

2) $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \neq \sigma_{23} \circ \sigma_{12}$,

3) $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{12} = \sigma_{23} \circ \sigma_{12} \circ \sigma_{23}$.

(6 Punkte)