Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 3, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 10.11. um 13.15 Uhr

1 [Untergruppen:] Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien A und B zwei Untergruppen von G.

a) Zeigen Sie, dass $A \cap B$ eine Untergruppe von G ist.

b) Beweisen Sie, dass die Annahme

$$A \cup B \text{ ist eine Untergruppe von } G \wedge ((A \setminus B) \neq \emptyset) \wedge ((B \setminus A) \neq \emptyset)$$

zu einem Widerspruch führt. Beweisen Sie, dass daraus folgt:

$$A \cup B \text{ ist eine Untergruppe von } G \Longleftrightarrow (A \subset B) \vee (B \subset A) \ .$$

c) Sei $C \subset A \cup B$. Zeigen Sie, dass

$$C \text{ ist eine Untergruppe von } G \Longrightarrow (C \subset A) \vee (C \subset B) \ .$$

(3 Punkte)

2 [Äquivalenzklassen:] Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G. Sei die Relation $\sim$ definiert durch

$$x_1 \sim x_2 :\Longleftrightarrow \exists h \in H, \text{ so dass } x_1 \cdot h = x_2 \ .$$

a) Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen als G/H die Menge der Äquivalenzklassen in G unter $\sim$.

b) Betrachte $(\mathbb{R}, +)$ mit der Untergruppe $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Quotientenmenge $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

c) Betrachte $\mathbb{Z}_{12} := \{0, 1, \ldots, 11\}$ zusammen mit der Addition modulo 12 und sei $H := \{0, 4, 8\}$. Beweisen Sie, dass H zusammen mit der Addition modulo 12 isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist und finden Sie $\mathbb{Z}_{12}/H$.

d) Sei nun $M := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und sei $\sim$ die Äquivalenzrelation definiert durch

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \text{ mit } x_i = \lambda \cdot y_i \text{ für } i = 1, 2 \ .$$

Bestimmen Sie die Menge der Äquivalenzklassen in M.

(6 Punkte)

3 [Ringe, Körper, Ideale:]

a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein Ring bilden. Begründen Sie Ihre Antwort.

1) $M := \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
2) $M := \{a + b\sqrt[3]{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
3) $M := \{a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

b) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Ein Ideal $I \subset R$ ist ein Unterring von R mit der Eigenschaft

$$x \cdot y \in I \qquad \forall x \in I \text{ und } \forall y \in R \ .$$

Die Ideale $\{0\} \subset R$ und $R \subset R$ nennt man trivial. Finden Sie ein nicht-triviales Ideal in $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, das Ihr Beispiel ein Ideal ist.

c) Sei M eine Menge und $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Betrachten Sie die Menge $K(M) := \{f : M \to K\}$ der Abbildungen von M nach K zusammen mir der Addition

$$(f \oplus g)(m) := f(m) + g(m)$$

und der Multiplikation

$$(f \odot g)(m) := f(m) \cdot g(m)$$

und zeigen Sie, dass $K(M)$ ein Ring ist. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für M, damit $K(M)$ zu einem Körper wird.

d) Seien R und S zwei Ringe mit den Einzelementen e_R beziehungsweise e_S, und sei $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Finden Sie eine hinreichende Bedingung für ϕ, damit $\phi(e_R) = e_S$ gilt.

(8 Punkte)

4

[Zyklische Gruppen:] Sei $(G, \cdot)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n, die vom Element x erzeugt wird. Das heißt, $G := \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ mit $x^n = x^0 = e$. Sei H eine Untergruppe von G. Alle Elemente von H sind also von der Form x^{k_i}, für $k_i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

a) Zeigen Sie, dass H selber eine zyklische Gruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass die Ordnung m von H ein Teiler von n ist.

(3 Punkte)