Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 4, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 17.11. um 13.15 Uhr

Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass alle Aufgaben in mathematisch exakter Form abzugeben sind. Für Unsauberkeiten in den Argumentationen wird es Punkteabzug geben.

1 [Körper] Wir setzen als bekannt voraus, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt. Wir definieren die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ durch

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist und dass dieser $\mathbb{Q}$ als echten Teilkörper enthält.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\sqrt{2}$ enthält.

(4 Punkte)

2 [Körper]

a) Beweisen Sie: $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn p eine Primzahl ist.

b) Seien K, K' zwei Körper und sei $\phi : K \to K'$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass ϕ entweder injektiv oder der Nullhomomorphismus ist. (Bemerkung: Der Nullhomomorphismus ist der Ringhomomorphismus dessen Bild die Menge $\{0\}$ ist.)

(6 Punkte)

3 [Polynome] Wie in Aufgabe 2 gezeigt werden soll, ist $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper, wenn n eine Primzahl ist. In diesem Fall können wir also auch den Ring $\mathbb{Z}_n[x]$ aller Polynome, deren Koeffizienten in $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ liegen, betrachten.

a) Bestimmen Sie zwei Polynome $q, r \in \mathbb{Z}_3[x]$, so dass

$$x^6 + x^4 + x^2 + 2x = (2x^2 + x + 1)q + r$$

und $\deg(r) < 2$ gilt.

b) Bestimmen Sie zwei Polynome $q, r \in \mathbb{Z}_5[x]$, so dass

$$x^5 + 1 = (x^2 + 2x + 1)q + r$$

und $\deg(r) < 2$ gilt.

c) Sei K ein beliebiger Körper.

(a) Zeigen Sie, dass der Polynomring $K[x]$ kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Polynomring $K[x]$ ein Einselement enthält.

(6 Punkte)

4 [Polynome] Seien $f, g \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome mit $\mu(f;\lambda) \leq \mu(g;\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann f ein Teiler von g ist. Gilt dieselbe Aussage auch für Polynome aus $\mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort. (Bemerkung: $\mu(f;\lambda)$ ist die Vielfachheit der Stelle λ von f.) *(4 Punkte)*