Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 5, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 24.11. um 13.15 Uhr

1 [Polynome, Faktorisierung] Sei das Polynom f in $\mathbb{R}[t]$ definiert durch

$$f(t) = 2t^7 - 2t^6 + 6t^5 + 74t^4 + 6t^3 + 154t^2 + 2t + 78 \; .$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen λ_k von f und deren Vielfachheit $\mu(f; \lambda_k)$ unter Benutzung der folgenden Tatsachen:

- -3 ist eine Nullstelle von f mit $\mu(f; -3) = 1$,
- Die imaginäre Einheit i ist eine Nullstelle von f mit $\mu(f; i) = 2$.

b) Faktorisieren Sie f über $\mathbb{R}[t]$, das heißt, schreiben Sie f als Produkt von irreduziblen Polynomen (also kleinstmöglichen linearen und quadratischen Polynomen), so wie es im Fischer auf Seite 69 steht.

c) Faktorisieren Sie f noch über $\mathbb{C}[t]$, das heißt, schreiben Sie f als Produkt von linearen Polynomen.

(4 Punkte)

2 [Geraden] Gegeben seien mittels ihrer Lösungsmengen die folgenden Geraden im $\mathbb{R}^2$

1. $G_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 1\}$,
2. $G_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3x_2 = 2\}$,
3. $G_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 - 2x_2 = 0\}$,

wobei $a \in \mathbb{R}$ gilt.

a) Bestimmen Sie die drei Punkte an denen sich jeweils zwei der Geraden schneiden. Zum Beispiel, im Falle von G_1 und G_2 müssen Sie die Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ finden, für die gilt: $2x_1 - x_2 = 1$ und $x_1 + 3x_2 = 2$.

b) Bestimmen Sie a so, dass die drei Geraden sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Geben Sie diesen Schnittpunkt an.

c) Zwei Geraden M_1, M_2 nennt man parallel, wenn für ihre Richtungsvektoren w_1 und w_2 gilt $w_1 = \lambda w_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Geben Sie zu jeder der Geraden G_i ein Beispiel einer parallelen Gerade an.

(3 Punkte)

3 [Geraden und Ebenen, Parameterdarstellung] Gegeben seien die Punkte $P = (3, 2, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $S = (2, 3, 1)$, $T = (2, 1, 3)$ und $R = (4, 3, 2)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie die beiden Darstellungen (eine Parameterdarstellung sowie eine Beschreibung als Lösungsmenge) für die Gerade durch die Punkte P und Q. Verfahren Sie ebenso mit den Geraden durch Q und S, sowie P und S beziehungsweise T und R.

b) In der Parameterdarstellung der Geraden haben Sie für jede Gerade einen Richtungsvektor bestimmt. Wir nehmen nun zur Bestimmung einer Ebene einen Punkt und zwei Richtungsvektoren.

   α) Benutzen Sie die Richtungsvektoren der Geraden durch Q und S, sowie P und S um eine Parameterdarstellung für diejenige Ebene zu bestimmen, die den Punkt S enthält. Zeigen Sie, dass die beiden Geraden in dieser Ebene liegen.

β) Verfahren Sie ebenso mit den beiden Geraden durch P und S sowie Q und P, und darüber hinaus mit den Geraden durch P und Q sowie Q und S.

γ) Zeigen Sie, dass diese drei Ebenen alle gleich sind.

δ) Wenn Sie die Richtungsvektoren der Geraden durch P und S sowie T und R benutzen, um eine Ebene durch den Punkt P zu beschreiben, enthält dann diese Ebene auch die Gerade durch T und R ? Was ist der Unterschied zu den vorangegangenen Ebenen und Geraden?

c) Ähnlich wie in Aufgabenteil b) betrachten wir die Gerade durch $(0,0,0)$ und $(-2,-2,1)$ und die Gerade durch T und R. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung mit den entsprechenden Richtungsvektoren dieser Geraden und dem Punkt T. Welcher Unterschied fällt auf? Finden Sie eine Ebene, die beide Geraden enthält.

(7 Punkte)

4 [Geraden, Ebenen, Parameterdarstellung]

a) Sei die Gerade L_1 in $\mathbb{R}^2$ gegeben mittels der Lösungsmenge

$$L_1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 2x_2 = 1\right\}.$$

Beschreiben Sie L_1 auch in Parameterdarstellung.

b) Sei die Gerade L_2 in $\mathbb{R}^2$ gegeben in der Parameterdarstellung

$$L_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists\lambda \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) = (1, -2) + \lambda(4, 5)\right\}.$$

Beschreiben Sie L_2 auch mittels einer Lösungsmenge.

c) Sei L_3 die Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(1,0,1)$ und $(2,1,2)$. Sei L_4 die Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(-1,1,-2)$ und $(0,-1,-1)$. Beschreiben Sie L_3 und L_4 mittels einer ihrer Parameterdarstellungen. Finden Sie für jede Gerade zwei verschiedene Ebenen, die diese Gerade enthalten. Beschreiben Sie diese Ebenen mittels ihrer Lösungsmengen.

d) Sei E die Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(2,3,4)$, $(4,2,3)$ und $(3,4,2)$. Beschreiben Sie diese Ebene mittels der Lösungsmenge einer Gleichung.

(6 Punkte)