Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE I* WS 2011/12

ÜBUNGSBLATT 6, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 1.12. um 13.15 Uhr

1 [Eliminationsverfahren von Gauß] Wir betrachten die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die Lösungsmengen Lös(A_1, b_1), Lös(A_2, b_2) und Lös(A_3, b_3) der linearen Gleichungssysteme $A_1 \cdot x = b_1$, $A_2 \cdot y = b_2$ und $A_3 \cdot z = b_3$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie dazu die erweiterten Koeffizientenmatrizen (A_k, b_k) für $k = 1, 2, 3$ auf eine Zeilenstufenform, bei der alle Pivot-Elemente gleich 1 sind und alle anderen Elemente in den Stufenspalten gleich 0, so dass im lösbaren Fall die Lösungsmenge in Parameterform unmittelbar ablesbar ist. Verifizieren Sie im lösbaren Fall die Lösungsmenge jeweils durch eine Probe. *(6 Punkte)*

2 [Lösbarkeit von Gleichungen]

a) In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 2 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Führen Sie dazu wie gewöhnlich einen Gaußschen Algorithmus durch und beachten Sie bei jedem Schritt eventuell nötige Fallunterscheidungen. Verifizieren Sie im lösbaren Fall die Lösungsmenge durch eine Probe.

b) In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \bar{1} \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \bar{2} \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= \bar{3} \end{aligned}$$

wobei $x_i \in \mathbb{Z}_2$. Wir erinnern daran, dass $\bar{1} = \bar{3}$ in $\mathbb{Z}_2$.

(4 Punkte)

3 [Eliminationsverfahren von Gauß in $\mathbb{Z}_p$]

a) Finden Sie für x_1, x_2, x_3 in $\mathbb{Z}_5$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Finden Sie für x_1, x_2, x_3 in $\mathbb{Z}_7$ die Lösungsmenge für das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Finden Sie für x_1, x_2 in $\mathbb{Z}_4$ die Lösungsmenge für das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bedenken Sie, dass Brüche keine Elemente von $\mathbb{Z}_p$ sind. Zum Beispiel sollte man $\frac{3}{2}$ durch 4 in $\mathbb{Z}_5$ ersetzen, denn 4 ist die Lösung der Gleichung $2x = 3$ modulo 5. *(6 Punkte)*

4 [Lineare Unabhängigkeit] Es seien Vektoren $v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir bezeichnen diese Vektoren als *linear unabhängig*, wenn aus der Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ (Es gilt: $\alpha_i \in \mathbb{R}$).

a) Seien die zwei Vektoren v_1 und v_2 linear unabhängig. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die zwei Vektoren $w_1 := \lambda v_1 + v_2$ und $w_2 := v_1 + \lambda v_2$ linear unabhängig?

b) Seien die k Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die k Vektoren $w_1 := v_1 + v_2, w_2 := v_2 + v_3, \dots, w_{k-1} = v_{k-1} + v_k, w_k = v_k + \lambda v_1$ linear unabhängig?

(4 Punkte)