Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 7, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 08.12. um 13.15 Uhr

1 [Vektorräume und Untervektorräume]

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Wir betrachten $V := \mathbb{Z}_4 \simeq \{0,1,2,3\}$ mit der Addition modulo 4 und den Körper $K := \mathbb{Z}_2 \simeq \{0,1\}$. Elemente in V können dann mit Skalaren (also Elementen in K) multipliziert werden, d.h. wir haben die Abbildung

$$\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

Beweisen Sie, dass V mit dieser Addition und Skalarmultiplikation *kein* Vektorraum über K ist.

c) Bilden die folgenden Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

α) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_2 = \lambda x_3\}$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + \mu x_2 + \lambda x_3 = 0\}$, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

γ) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x_1| \geq |x_2|\}$.

(7 Punkte)

2 [Räume von Abbildungen] Für eine nicht-leere Menge X und einen K-Vektorraum W sind die Addition und Skalarmultiplikation auf $Abb(X, W)$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Überzeugen Sie sich, dass $Abb(X, W)$ damit zu einem K-Vektorraum wird (dies müssen Sie nicht aufschreiben!). Sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume von $Abb(X, W)$?

a) $V := \{f \in Abb(\mathbb{R}, W) \ : \ f(2x) = 2f(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

b) $V := \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ f(x+y) = f(x) + f(y) \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}\}$.

(4 Punkte)

3 [Lineare Hülle]

a) Wir betrachten die Vektoren $x := (1, 2, k)$, $v := (1, 3, 1)$, $w := (1, 2, k^2)$, $z := (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie alle $k \in \mathbb{R}$, sodass $x \in span(v, w, z)$, und stellen Sie für diese k den Vektor x als Linearkombination von v, w und z dar.

b) Wir betrachten die Polynome P, Q, R mit $P(t) = t^2 + 1$, $Q(t) = t(t+1)$ und $R(t) = t + 1$.

α) Gilt $R \in span_{\mathbb{Z}_2}(P, Q)$, und wenn ja, stellen Sie R als Linearkombination von P und Q dar.

β) Gilt $R \in span_{\mathbb{R}}(P, Q)$, und wenn ja, stellen Sie R als Linearkombination von P und Q dar.

(5 Punkte)

4 [Quotientenraum] Sei V ein Vektorraum über K und sei U ein Untervektorraum von V. Ähnlich wie bei Untergruppen können wir den Quotientenraum V/U bilden, d.h. für $x \in V$ sei $x+U := \{x+u \ : \ u \in U\}$ und $V/U := \{x + U \ : \ x \in V\}$. Auf V/U definieren wir Verknüpfungen durch

$$(x+U) + (y+U) := (x+y) + U, \qquad \text{und} \qquad \lambda(x+U) := \lambda x + U, \text{ für } \lambda \in K.$$

Zeigen Sie, dass V/U ein Vektorraum über K ist.

[Hinweise:] Vgl. Sie Aufgabe 2 auf Übungsblatt 3. Bei der Multiplikation muss auch die Unabhängigkeit vom Repräsentanten gezeigt werden. *(4 Punkte)*