Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 8, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 15.12. um 13.15 Uhr

1 [Basen von Vektorräumen, Dimension]

a) Bestimmen Sie eine Basis für jeden der folgenden Vektorräume. Beweisen Sie ihre Aussagen.

α) $V := \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0\}$

β) $V \subset \mathbb{R}[t]$ mit $V := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{t,\ t^3 - t + 1,\ t^3 - t^2 - 1,\ 3t^3 - 2t^2 - 1,\ t^2 - 2\}$

γ) $V \subset \mathbb{Z}_5[t]$ mit $V := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_5} \{t,\ 3t^2 + 1,\ t^2 + t,\ 1\}$

δ) $V := \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad \wedge \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

b) Sei $M_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen. Wir definieren die Teilmengen

$$S_n(\mathbb{R}) := \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = B\}, \quad A_n(\mathbb{R}) := \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = -B\}\ ,$$

wobei B^t die Transponierte der Matrix B ist. Beweisen Sie, dass $S_n(\mathbb{R})$ und $A_n(\mathbb{R})$ Untervektorräume von $M_n(\mathbb{R})$ sind. Finden Sie Basen für $S_n(\mathbb{R})$ und $A_n(\mathbb{R})$ und bestimmen Sie jeweils deren Dimension.

(6 Punkte)

2 [Basenergänzung, Lineare Unabhängigkeit]

a) Bestimmen Sie $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^5$ so, dass $(v_1, v_2, w_1, w_2, w_3)$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ wird (mit Beweis).

b) Sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wie nehmen fünf beliebige Vektoren $a, b, c, d, e \in V$ und definieren

$$v_1 = a + b + c \quad v_2 = -b + c - d + e, \quad v_3 = 3a - 2c + 3e,$$
$$v_4 = 4a + 2b + 3c + d - e, \quad v_5 = -2a - 3b + 4c - d - 2e\ .$$

Beweisen Sie, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ linear abhängig sind.

(4 Punkte)

3 [Dimension, Rang]

a) Sei der Untervektorraum V_A von $\mathbb{R}^n$ definiert durch $V_A := \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = 0\}$, wobei A eine $k \times n$ Matrix ist. Zeigen Sie, dass

$$\dim V_A = n - \text{Zeilenrang}(A)\ .$$

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $H \subset V$ eine *Hyperebene* in V, also ein $(n-1)$ dimensionaler Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subset V$ mit $U \not\subseteq H$ gilt

$$\dim(U \cap H) = \dim(U) - 1\ .$$

(6 Punkte)

4 [Dimension, Lineare Unabhängigkeit] Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ unendliche Dimension hat. Verwenden Sie dafür die Menge $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ aller Primzahlen sowie $\log \mathbb{P} := \{\log p : p \in \mathbb{P}\}$. Wir setzen als bekannt voraus:

1. $\mathbb{P}$ ist eine unendliche Menge.
2. Es gelten die üblichen Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus log.
3. Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.

Hinweis: Betrachten Sie Linearkombinationen von Elementen in $\log \mathbb{P}$. *(4 Punkte)*