Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 9, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 12.01. um 13.15 Uhr

1 [Bild, Kern, Faser] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ mit der Matrix

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, mit $a \neq 0 \neq c$.

Bestimmen Sie den Kern $\operatorname{Ker} f$ und das Bild $\operatorname{Im} f$ von f, sowie jeweils die Dimension dieser Räume. Achten Sie dabei auf entsprechend nötige Fallunterscheidungen.

b) $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Faser von f über dem Punkt (a, b). Finden Sie eine geometrische Beschreibung des Bildes von f.

c) Wie muss die Matrix in b) abgeändert werden, sodass $f((a, b)) = (a, b)$ gilt, und damit (a, b) ein Fixpunkt wird, ohne dass durch diese Änderung das Bild oder der Kern von f verändert werden?

(6 Punkte)

2 [Bild, Kern] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Bild und Kern sowie deren Dimensionen. Geben Sie auch jeweils eine Basis an.

(4 Punkte)

3 [Summen von Vektorräumen] Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} U &:= \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; v_1 + \ldots + v_n = 0\}, \\ U_0 &:= \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; v_1 = \ldots = v_n\}, \\ U_j &:= \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; v_i = 0 \;\; \forall i \neq j\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für jedes $j \in \{0, \ldots, n\}$ ist $U_j \oplus U = \mathbb{R}^n$.

(5 Punkte)

4 [Summen von Vektorräumen, Basis] Sei W ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei U ein $n-1$-dimensionaler Untervektorraum von W und V ein beliebiger 1-dimensionaler Unterraum von W, sodass $U \oplus V = W$. Ferner sei $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ eine Basis von U und (a) eine Basis von V. Zeigen Sie, dass $(a, b_1 + \lambda_1 a, \ldots, b_{n-1} + \lambda_{n-1} a)$ für beliebige $\lambda_i \in \mathbb{R}$ eine Basis von W ist.

(5 Punkte)