Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* SS 2012

Bonusübungsblatt, Abgabe spätestens bis in der VL am Di. 10.07. um 13.15 Uhr

1 [Jordansche Normalformen]

a) Bringen Sie folgende Matrix A in Jordansche Normalform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $B \in M(12 \times 12; \mathbb{R})$ mit dem Minimalpolynom $M_B(t) = t^4(t-2)^2$ und dem charakteristischen Polynom $P_B(t) = t^8(t-2)^4$. Bestimmen Sie alle inequivalenten Jordanschen Normalformen von B.

(5 Punkte)

2 [Hauptachsentransformationen]

a) Sei die Quadrik Q_A über $\mathbb{R}^2$ gegeben durch die Gleichung

$$x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1x_2 - 4x_1 + 2x_2 + 2 = 0.$$

Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Sei gegeben die Quadrik $Q_B = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) : x^tBx = 0$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die maximale Dimension der projektiven Unterräume von $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ die in Q_B enthalten sind.
Hinweis: Siehe Aufgabe 3 aus Übungblatt 11 und Seite 197 in [F3].

(4 Punkte)

3 [Skalarprodukt] Sei β ein positiv definites Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit $\dim V < \infty$. Sei $s \in \mathbb{N}$ und seien ferner $v_1, \ldots, v_s \in V$. Wir definieren die $s \times s$ Matrix $C = (\beta(v_i, v_j))$. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_s$ genau dann linear abhängig sind, wenn $\det(C) = 0$.

(5 Punkte)

4 [Duale Vektorräume]

a) Sei $U = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für den Annulator $U^0 = \{\phi \in \left(\mathbb{R}^5\right)^* : \forall x \in U \ \phi(x) = 0\}$.

b) Seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Zeigen Sie:

- $\big(U_1 + U_2\big)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$ und $\big(U_1 \cap U_2\big)^0 = U_1^0 + U_2^0$.
- $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^0 \subset U_1^0$.

c) Seien V, W zwei Vektorräume und $F : V \to W$ ein Homomorphismus. Ferner sei $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

$$F^*(U^0) = \big(F^{-1}(U)\big)^0 .$$

(5 Punkte)

5 [Affine Räume und Abbildungen]

a) Sei A ein dreidimensionaler affiner Raum über $\mathbb{Z}_2$. Bestimmen Sie:

- die Anzahl der Punkte, Geraden und Ebenen, die A enthält.
- die Anzahl der Punkte, die eine Gerade enthält.
- die Anzahl der Punkte und Geraden, die eine Ebene enthält.
- die Anzahl der zu einer Geraden parallelen Geraden.

b) Sei A ein endlichdimensionaler affiner Raum und sei $U \subset A$ ein affiner Teilraum. Ferner sei W ein Untervektorraum von V_A so, dass $V_A = W \oplus V_U$. Zeigen Sie

- $\forall p \in A$ besteht die Menge $(p + W) \cap U$ aus genau einen Punkt.
- die Abbildung π_W, definiert durch $\pi_W(p) = (p + W) \cap U$ ist eine affine Abbildung mit $\mathrm{Kern}(F_{\pi_W}) = W$ und $F_{\pi_W}(V_A) = V_U$.

(6 Punkte)

6 [Hilbert Räume] Auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{C}) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \,:\, x_i \in \mathbb{C}\,\forall i \text{ und } \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty\}$ definieren wir $\langle\cdot,\cdot\rangle$ durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : ((x_i),(y_i)) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i .$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform ist.

b) Sei $W := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}) : x_j \neq 0$ für endlich viele $j\}$. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von $\ell^2(\mathbb{C})$ ist und dass $W \neq \ell^2(\mathbb{C})$.

c) Zeigen Sie, dass für einen Untervektorraum U eines beliebigen unitären Vektorraums V gilt

$$U \subset \big(U^\perp\big)^\perp .$$

d) Finden und begründen Sie ein Beispiel für U sodass $U \neq \big(U^\perp\big)^\perp$.

(5 Punkte)