Übungsblatt 1 : Lösungsskizzen

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 2 & -2 & 1-x \end{vmatrix} \underset{\text{Laplace}}{=} (2-x)\left(x^2-3x+4\right) - 2(-1-x) + 3(2x-6)$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 4x + 2x^2 - \cancel{6x} + 8 + 2 + 2x + \cancel{6x} - 18$$

$$= -x^3 + 5x^2 - 2x - 8 = -(x+1)(x-2)(x-4)$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$

1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1) = \operatorname{Eig}(A; \lambda_1)$$

2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Eig}(A; \lambda_2) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_2)$$

3) $$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Eig}(A; \lambda_3) = \operatorname{span}(v_3)$$

Aufgabe 2 $A \in M(n\times n; \mathbb{K})$ ist diagonalisierbar

$\Rightarrow \exists S \in M(n\times n; \mathbb{K})$ mit $SAS^{-1} = D$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$

- $P_A(x) = \det(A - x\mathbb{1}) = (-1)^n(x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0)$

- $P_A(A) = (-1)^n(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 \mathbb{1})$
  wobei $\mathbb{1}$ die $n\times n$ Einheitsmatrix ist.

- $(SAS^{-1})^m = S A^m S^{-1}$

$\Rightarrow P_A(A) = P_A(S^{-1}SAS^{-1}S)$

$= S^{-1} P_A(SAS^{-1}) S = S^{-1} P_A(D) S$

$= S^{-1} \begin{pmatrix} P_A(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_A(\lambda_n) \end{pmatrix} S = 0$

da $P_A(\lambda_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$

Aufgabe 3 $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) • $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = C^n$

Beweis per Induktion

Induktionsanfang: offensichtlich für $n = 0$ oder 1

Induktionsschritt:

$C^{n+1} = C^n \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 2 + 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \quad \square$

• $\exp(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$

b) $P_C(x) = (x-1)(x-2)$

• $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D = SCS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• $\exp(C) = \exp(S^{-1} S C S^{-1} S) = S^{-1} \exp(D) S$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$

c) $\exp\left(C + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$

$\exp(C)\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2-e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e & -e+e^2-e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq \exp\left(C + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Also $A = C$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ geben ein Beispiel für zwei Matrizen mit $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Aufgabe 4 : $F : V \longrightarrow V$ linear (V ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum)

- $F^2 - F$ hat Eigenwert -1

$\Rightarrow \exists v \in V$ mit $(F^2-F)v = -v$

$\Rightarrow F^3 v - F^2 v = -Fv$

$\Rightarrow F^3 v = (F^2 - F)v = -v$

$\Rightarrow F^3$ hat Eigenwert -1.