Übungsblatt 2 : Lösungsskizzen

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & 0 & 1 \\ -b & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} a-x & 0 \\ -b & 1-x \end{vmatrix}$$
$$= (2-x)(a-x)(1-x)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = a$

Probleme mit Diagonalisierbarkeit können nur geschehen, falls die Multiplizität der Eigenwerte grösser Eins ist.

Fall 1) $\lambda_3 = a = 2 = \lambda_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Eigenraum hat Dimension 1 $\forall b$ mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

Fall 2) $\lambda_3 = a = 1 = \lambda_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Eigenraum hat Dimension 2 für $b = 0$ und 1 sonst

Also: A ist nicht diagonalisierbar für

$a = 2$ oder $a = 1 \wedge b \neq 0$

Triagonalisierung

1) $a=2$ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=v_1$ Eigenvektor mit Eigenwert 1

$\begin{pmatrix}1\\-b\\0\end{pmatrix}=v_2$ Eigenvektor mit Eigenwert 2

Finde w mit $Aw = 2w + v_2$

$(A-2\mathbb{1})w = v_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1\\-b&-1&1&-b\\0&0&0&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l}x_3=1\\-bx_1-x_2+1=-b\end{array}$$

Wähle $x_1=1,\ x_2=1$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-b&1\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow S=\begin{pmatrix}b&1&-1-b\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

2) $a=1,\ b\neq 0$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\1-b\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor mit Eigenwert 2

$v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ Eigenvektor mit Eigenwert 1

Finde w mit $Aw = w + v_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\-b&0&1&1\\0&0&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\-b&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \text{wähle } w=\begin{pmatrix}-\frac{1}{b}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{b}\\1-b&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&b-1\\-b&0&b\end{pmatrix}$$

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$P_A(x) = (1-x)\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -2 & 2-x & 1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$= (x-1)^3(x+1)$$

- $$P_B(x) = (-1-x)(3-x)\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-3)^2$$

- Man überprüft leicht, dass $AB = BA$ (notwendige Bedingung für die Simultane Diagonalisierung)

- Wir beginnen mit A
  - $\underline{\lambda_1 = -1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\lambda_1 = -1$ einfach ist und $AB = BA$, muss v_1 auch ein Eigenvektor von B sein ($A(Bv_1) = B(Av_1) = -Bv_1 \Rightarrow Bv_1$ ist Eigenvektor von A mit Eigenwert -1. Da es nur einen gibt (λ_1 ist einfach) muss Bv_1 proportional zu v_1 sein.)

$$Bv_1 = -v_1$$

- $\lambda_2 = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 3 dim Eigenraum

$\mathrm{Eig}(A; \lambda_2) = \mathrm{span}(v_2, v_3, v_4)$

- Suche v_2, v_3, v_4 so, dass $\begin{cases} Bv_2 = -v_2 \\ Bv_3 = 3v_3 \\ Bv_4 = 3v_4 \end{cases}$

- v_2 ist also Lösung von

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)_{B-(-1)\mathbb{1}_4} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- v_3 und v_4 sind Lösungen von

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_2$ und x_4 sind frei

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad SBS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) $OAO^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = O^{-1}DO = O^tDO$, da O orthogonal ist

$A^t = (O^tDO)^t = O^tD^t(O^t)^t = O^tDO = A$

$\Rightarrow$ A ist symmetrisch.

b) $UBU^{-1} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$B = U^{-1}DU = U^{+}DU$

$\Rightarrow B^{+} = U^{+}\overline{D}U \Rightarrow BB^{+} - B^{+}B =$

$= U^{+}DUU^{+}\overline{D}U - U^{+}\overline{D}UU^{+}DU$

$= U^{+}(D\overline{D} - \overline{D}D)U = 0$ da D und $\overline{D}$ diagonal sind.

c) $B = U^{+}DU$ und $D = \overline{D}$

$\Rightarrow B^{+} = U^{+}\overline{D}U = U^{+}DU = B$

$\Rightarrow$ B ist hermitesch.

Aufgabe 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 & -9 \\ -1 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = (x+1)(x-3)(x-2)^2$$

$\lambda_1 = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & -9 & 0 \\ -1 & -3 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -14 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -5 & -8 & -9 & 0 \\ -1 & -7 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -5 & -8 & -9 & 0 \\ -1 & -6 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A ist nicht diagonalisierbar

Suche w mit

$$Aw = 2w + v_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -5 & -8 & -9 & -4 \\ -1 & -6 & -8 & -10 & -5 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & -11 & -6 \\ 0 & -7 & -8 & -11 & -6 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Wähle } w = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = (v_1, v_2, v_3, w) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$