# Musterlösung Übungsblatt 3, LAAG II*, SoSe 2012

1. Es ist

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 1$$

Es gilt:

$$P_A(A) = A^3 - 9A^2 - 6A - E = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad A(A^2 - 9A - 6E) = E$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = A^2 - 9A - 6E$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Es gilt:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$$

Damit folgt: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow \langle x,y \rangle = 0$.

(b) Es gilt:

$$\|x\| = \|y\| \Longleftrightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2$$
$$\Longleftrightarrow \langle x,x \rangle = \langle y,y \rangle$$
$$\Longleftrightarrow \langle x,x \rangle - \langle y,y \rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow \langle x,x \rangle + \langle y,x \rangle - \langle x,y \rangle - \langle y,y \rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow \langle x+y, x-y \rangle = 0.$$

(c) Es gilt:

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{\ell} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$
$$= \left\langle x - \sum_{k=1}^{\ell} \langle x, e_k \rangle e_k, \; x - \sum_{k=1}^{\ell} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - \sum_{k=1}^{l} \langle x,e_k\rangle\langle e_k,x\rangle + \langle x, -\sum_{k=1}^{l}\langle x,e_k\rangle e_k\rangle$$
$$+ \langle -\sum_{k=1}^{l}\langle x,e_k\rangle e_k, -\sum_{k=1}^{l}\langle x,e_k\rangle e_k\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle - \sum_{k=1}^{l}\langle x,e_k\rangle\cdot\overline{\langle x,e_k\rangle} - \sum_{k=1}^{l}\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle x,e_k\rangle$$
$$+ \sum_{k=1}^{l}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle}, \quad \text{da} \quad \langle e_k,e_l\rangle = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases}$$
$$= \langle x,x\rangle - \sum_{k=1}^{l}\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle x,e_k\rangle$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{l}|\langle x,e_k\rangle|^2, \quad \text{da für } z\in\mathbb{C} \text{ gilt: } \bar{z}\cdot z = |z|^2.$$

$$\iff \sum_{k=1}^{l}|\langle x,e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Bem.: Diese Ungleichung heißt <u>Besselsche Ungleichung</u>.

Die Aussagen (a) und (b) gelten <u>nicht</u> für unitäre Vektorräume.

Gegenbsp. zu (a): Wähle $V := \mathbb{C}^2$ und $x := (i,i), y := (1,1)$

Dann gilt zwar $\|x\|^2 = \|y\|^2 = 2$ und

$$\|x+y\|^2 = \langle (i+1, i+1), (i+1, i+1)\rangle = (1+i)(1-i) + (1+i)(1-i)$$
$$= 2 + 2 = 4.$$

Somit ist $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 4$, aber es ist

$$\langle x,y\rangle = i + i = 2i \neq 0.$$

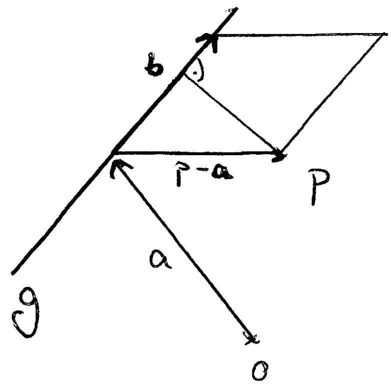
Gegenbsp. zu (b): Wähle $V := \mathbb{C}$ und $x := i$, $y := 1$.

Dann gilt zwar $\|x\| = \|y\| = 1$, aber es ist

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle i+1, i-1\rangle = (i+1)\cdot(-i-1) = -2i \neq 0.$$

Die Aussage (c) gilt auch für unitäre Vektorräume, wie der Beweis zeigt.

3. Betrachte das Parallelogramm, was durch die Vektoren $b$ und $p-a$ geformt wird




Der Abstand des Punktes $p$ zur Geraden $g$ ist die Höhe des Parallelogramms zur Grundseite $b$.
Nun gilt:
Fläche des Parallelogramms = Grundseite · Höhe.
Für die Fläche des Parallelogramms gilt: $\|b \times (p-a)\|$.
Für die Länge der Grundseite $b$ gilt: $\|b\|$.
Somit ist die Höhe und damit der Abstand $d$ gegeben durch:

$$d = \frac{\|b \times (p-a)\|}{\|b\|}.$$

Für das konkrete Beispiel gilt somit:

$$d = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5} \approx 2{,}6833.$$

4.
(a) Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- $\beta(x_1 + x_2, y_1) = ((x_1)_1 + (x_1)_2)(y_1)_1 - ((x_1)_1 + (x_1)_2)\cdot(y_2)_1 - ((x_2)_1 + (x_2)_2)\cdot(y_1)_1$
$+ 3((x_2)_1 + (x_2)_2)\cdot(y_2)_1$
$= (x_1)_1 \cdot (y_1)_1 + (x_1)_2 (y_1)_1 - (x_1)_1 \cdot (y_2)_1 - (x_1)_2 \cdot (y_2)_1 - (x_2)_1 \cdot (y_1)_1$
$- (x_2)_2 \cdot (y_1)_1 + 3(x_2)_1 \cdot (y_2)_1 + 3 \cdot (x_2)_2 \cdot (y_2)_1$

$= \beta(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_1)$.

- $\beta(x_1, y_1 + y_2) = (x_1)_1 \cdot ((y_1)_1 + (y_1)_2) - (x_1)_1 \cdot ((y_2)_1 + (y_2)_2)$
  $- (x_2)_1 \cdot ((y_1)_1 + (y_1)_2) + 3(x_2)_1 \cdot ((y_2)_1 + (y_2)_2)$

  $= (x_1)_1 \cdot (y_1)_1 + (x_1)_1 \cdot (y_1)_2 - (x_1)_1 \cdot (y_2)_1 - (x_1)_1 \cdot (y_2)_2 - (x_2)_1 \cdot (y_1)_1$
  $- (x_2)_1 \cdot (y_1)_2 + 3(x_2)_1 \cdot (y_2)_1 + 3 \cdot (x_2)_1 \cdot (y_2)_1$

  $= \beta(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_2)$.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\beta(\alpha x, y) = (\alpha x_1) y_1 - (\alpha x_1) y_2 - (\alpha x_2) y_1 + 3(\alpha x_2) y_2$
  $= \alpha (x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2)$
  $= \alpha \cdot \beta(x, y)$
- $\beta(x, \alpha y) = x_1 (\alpha y_1) - x_1 (\alpha y_2) - x_2 (\alpha y_1) + 3 x_2 (\alpha y_2)$
  $= \alpha (x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2)$
  $= \alpha \cdot \beta(x, y)$.

(b) $\mathbb{R}^2$ ist offensichtlich ein Vektorraum.
Zeige noch: $\beta$ ist ein positiv definites, reelles Skalarprodukt.

- $\beta$ ist Skalarprodukt, d.h. $\beta$ ist symmetrisch: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:
  $\beta(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$
  $= y_1 x_1 - y_1 x_2 - y_2 x_1 + 3 y_2 x_2 = \beta(y, x)$.

  $\beta$ ist offensichtlich eine reelle Abbildung.
- $\beta$ ist positiv definit: $\forall x \in \mathbb{R}^2$:

  (i) $\beta(x, x) = x_1 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 3 x_2 x_2$
  $= x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 3 x_2^2$
  $= \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2 x_2^2}_{\geq 0} \geq 0$

  (ii) $\beta(x, x) = (x_1 - x_2)^2 + 2 x_2^2 = 0$
  $\Rightarrow x_2 = 0$ und $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = 0$.
  $x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \beta(0, 0) = (0 - 0)^2 + 2 \cdot 0^2 = 0$.

(c) $\beta((3, -5), (3, -5)) = (3 - (-5))^2 + 2 \cdot (-5)^2 = 64 + 50 = 114$.
$\Rightarrow \|(3, -5)\| = \sqrt{114} \approx 10{,}6771$.