Übungsblatt 4: Lösungsskizzen

Aufgabe 1

$H = \{ x \in \mathbb{R}^4 , x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \}$

$\Rightarrow b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die w_i sind lin. unabh. Lösungen von der Gleichung $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

Also wähle

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $w_2' = w_2 - \langle w_2, w_1 \rangle \frac{w_1}{\|w_1\|^2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $w_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $v_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $w_3'' = w_3' - \langle w_3', w_2' \rangle \frac{w_2'}{\|w_2'\|^2}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$v_3 = \frac{w_3''}{\|w_3''\|} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

$A \in M(2\times 2; \mathbb{C})$

$A^{-1} = A^{+} \wedge \det A = 1$

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{+} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} d = \overline{a} \\ c = -\overline{b} \end{matrix}$

Also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$

$1 \overset{!}{=} \det(A) = |a|^2 + |b|^2$

2) $a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow \begin{matrix} a = x_1 + i x_2 \\ b = x_3 + i x_4 \end{matrix}$ $\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$

$1 = |a|^2 + |b|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\|^2$

Also ist die Abbildung

$f: S^3 \longrightarrow SU(2)$

$x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 & x_3 + i x_4 \\ -x_3 + i x_4 & x_1 - i x_2 \end{pmatrix}$ bijektiv

Aufgabe 3

a) $S: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ist sesquilinear

$\Rightarrow \exists M \in M(n \times n; \mathbb{C})$ mit

$S(x,y) = x^+ M y$

$$M = \frac{M + M^+}{2} + \frac{M - M^+}{2} =: A + B$$

$$A^+ = \left(\frac{M + M^+}{2}\right)^+ = \frac{M + M^+}{2} = A \quad \text{da } (M^+)^+ = M$$

$$B^+ = \left(\frac{M - M^+}{2}\right)^+ = -B$$

$\Rightarrow S(x,y) = x^+ A y + x^+ B y = h(x,y) + a(x,y)$

wobei h hermitesch und a antihermitesch sind.

Eindeutigkeit: Seien A, B so, dass $M = A + B$ mit A hermitesch und B antihermitesch

$\Rightarrow M = A + B \Rightarrow M^+ = A - B$

$\Rightarrow A = \frac{M + M^+}{2}, \quad B = \frac{M - M^+}{2}$

b) $(X,Y) := Sp(X^+ Y)$

- $(X,Y) = Sp(X^+ Y) = Sp((Y^+ X)^+) = \overline{Sp(Y^+ X)}$
  $= \overline{(Y,X)}$, da $Sp(A^+) = Sp\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix} = \overline{Sp(A)}$

- $Sp(X^+(Y+Z)) = Sp(X^+ Y) + Sp(X^+ Z)$,
  da die Spur linear ist

- $(X,X) = Sp(X^+ X)$, $X = (a_{ij})$
  $$= Sp \begin{bmatrix} |a_{11}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 & & * \\ & \ddots & \\ * & & |a_{1n}|^2 + \dots + |a_{nn}|^2 \end{bmatrix}$$

Also

$$(X,X) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0$$

$$(X,X) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i,j \Leftrightarrow X = 0$$

Also ist $\|X\| := \sqrt{Sp(X^+X)}$ eine Norm

α) X spurlos, $Sp(X) = 0$, $X = (a_{ij})$, $Y = (b_{ij})$

$0 \overset{!}{=} Sp(X^+Y) = \overline{a_{ij}} b_{ij}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$

Eine Basis des Raumes der Spurlosen Matrizen besteht aus

$(E_{ij})_{i \neq j} \cup (E_{ii} - E_{i+1,i+1})_{i=1}^{n-1}$, wobei

E_{ij} die Matrix
$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \text{- i-te Zeile} \\ \uparrow & \\ \text{j-te Spalten} & \end{array}$$

$0 = Sp(E_{ij}^+ Y) \Rightarrow b_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$0 = Sp((E_{ii} - E_{i+1,i+1})^+ Y) \Rightarrow b_{ii} = b_{i+1,i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$

Also $Y = b \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{C}$

<u>Def</u>: $\mathcal{U} = \{X \in M(n \times n; \mathbb{C}) : Sp(X) = 0\}$

$\Rightarrow \mathcal{U}^\perp = span_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right)$

β) $H = \{X \in M(n \times n; \mathbb{C}) : X^+ = X\}$

Basis von H:
- E_{kk} — $k = 1, \dots, n$
- $i(E_{kl} - E_{lk})$ — $k \neq l$
- $E_{kl} + E_{lk}$ — $k \neq l$

$Y = (b_{ij})$

- $(E_{kk}, Y) = 0 \Rightarrow b_{kk} = 0$
- $(i(E_{kl} - E_{lk}), Y) = 0 \Rightarrow b_{kl} - b_{lk} = 0$
- $(E_{kl} + E_{lk}, Y) = 0 \Rightarrow b_{kl} + b_{lk} = 0$

$\Rightarrow Y = 0$

Also $H^\perp = \{0\}$

γ) $OD := \{ X \in M(n \times n; \mathbb{C}) \mid X = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \}$ ③

$Y = (b_{ij})$

$(X, Y) = 0 \Rightarrow b_{kl} = 0$ für $k \leq l$

$\Rightarrow OD^{\perp} = \{ X \in M(n \times n; \mathbb{C}) : Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots\, b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \}$

c) $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$, $B := A^{+} A$

α) $B^{+} = (A^{+} A)^{+} = A^{+} (A^{+})^{+} = A^{+} A = B$

β) Sei $v \in \mathbb{C}^n$ mit $Bv = \lambda v$

$0 \leq \|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = v^{+} A^{+} A v$

$= \langle v, Bv \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \underbrace{\|v\|^2}_{\neq 0}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} \geq 0$

γ) B pos. definit $\Leftrightarrow \langle v, Bv \rangle > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \langle Av, Av \rangle > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \|Av\| > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\} \Leftrightarrow A$ ist invertierbar

Aufgabe 4

a) · $v \in Ker(F)$

$\Rightarrow F(v) = 0$

$\Rightarrow 0 = \langle w, F(v) \rangle \quad \forall w \in V$

$\Leftrightarrow 0 = \langle F^*(w), v \rangle \quad \forall w \in V$

$\Rightarrow Ker(F) \subset (\operatorname{Im} F^*)^\perp$

· Sei $v \in V$ mit $\langle F^*(w), v \rangle = 0 \quad \forall w \in V$
(also $v \in (\operatorname{Im} F^*)^\perp$)

$\Rightarrow \langle w, F(v) \rangle = 0 \quad \forall w \in V$

$\Rightarrow F(v) = 0$ da $V^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow v \in Ker(F) \Rightarrow Ker(F) \supset (\operatorname{Im} F^*)^\perp$

$\Rightarrow Ker(F) = (\operatorname{Im} F^*)^\perp$

b) Sei F normal

$\|F(x)\|^2 = \langle F(x), F(x) \rangle = \langle F^*(F(x)), x \rangle$

$= \langle F(F^*(x)), x \rangle = \overline{\langle x, F(F^*(x)) \rangle}$

$= \overline{\langle F^*(x), F^*(x) \rangle} = \|F^*(x)\|^2$

c) Folgt aus b) da

$v \in Ker F \Leftrightarrow \|F(v)\| = 0 \Leftrightarrow \|F^*(v)\| = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(F^*)$

d) Sei F normal.

$\Rightarrow$ Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $F - \lambda id$ normal
(id ist die Identitätsabbildung)

$G_\lambda = F - \lambda id \Rightarrow G_\lambda^* = F^* - \bar{\lambda} id$

Aus c) folgt $Ker\, G_\lambda = Ker\, G_\lambda^*$

$\Rightarrow Eig(F, \lambda) = Eig(F^*, \bar{\lambda})$

e) Sei F normal

$$F(v_i) = \lambda_i v_i \quad i = 1,2 \quad , \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow F^*(v_i) = \overline{\lambda_i} v_i$$

$$\lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, F(v_2) \rangle = \langle F^*(v_1), v_2 \rangle$$

$$= \langle \overline{\lambda_1} v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1 v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

f) Sei F normal, λ ein E.W. von F ~~Sei W ein U.V.R. von V so, dass $F(x) \in W \ \forall x \in W$~~

$\mathcal{U} := \mathrm{Eig}(F,\lambda)^\perp$

Seien $v \in \mathrm{Eig}(F,\lambda)$ und $w \in \mathcal{U}$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle \underbrace{F^*(v)}_{\substack{\in \mathrm{Eig}(F,\lambda) \\ \text{nach d}}}, w \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle v, F(w) \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathrm{Eig}(F,\lambda)$$

$\Rightarrow F(w) \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ ist invariant unter F.