Lösungsskizze:

1)

a) Beweis durch Widerspruch:

Annahme, $\dim \underbrace{\left(Eig(p,1) \oplus Eig(p,-1)\right)^{\perp}}_{=:E^c}$ ist ungerade.

dann hat das charakteristische Polynom von $p|_{E^c}$ ungerade Grad, und muss daher nach dem Zwischenwertsatz der Analysis eine Nst haben. diese sei $\lambda \in \mathbb{R}$. weil $\|F(v)\| = \|v\|$ gilt $|\lambda| = 1$, also ist der zugehörige EV in E. ↯.

b) Man benutze das Lemma aus dem Fischer, Seite 309:

"Zu jedem normalen Endo eines eukl. VR V mit $\dim V \geq 1$ gibt es einen Untervektorraum $U \subset V$, der invariant ist, und $1 \leq \dim U \leq 2$."

Man mache sich nur noch klar, dass der Beweis dieses Lemmas schon genügt.

2a)

(a) $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$

$(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$

(b) Man zeige $A^{**} = A$, dann gilt:

$$(A^{-1})^*A^* = ((A^{-1})^*A^*)^{**}$$
$$= (A^{**}(A^{-1})^{**})^*$$
$$= (AA^{-1})^* = Id^* = Id \quad \square$$

---

2 b)

$$\langle S((x_i)_i), (y_i)_i \rangle = \langle (0, x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \rangle$$
$$= \sum_{i=2}^{\infty} \overline{x_{i-1}}\, y_i$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_{j}}\, y_{j+1}$$
$$= \langle (x_1, x_2, \ldots), (y_2, y_3, \ldots) \rangle$$
$$= \langle (x_i)_i, S^*((y_i)_i) \rangle$$

$$\Rightarrow S^*((y_i)_i) := (y_2, y_3, \ldots).$$

<u>EW:</u> <u>EV zu S:</u> Sei $(x_i)_i$ EV zu $\lambda \neq 0$ von S.

dann $\underbrace{S(x_i)_i}_{=(0, x_1, x_2 \ldots)} = \lambda (x_i)$

$= (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots)$

$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ etc $\Rightarrow x_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow (x_i) = 0$

kein EV!

<u>Falls $\lambda = 0$:</u>

falls (x_i) EV zu 0, dann ist $0 = \lambda x_1 \Rightarrow x_1 = 0$ etc $\Rightarrow (x_i) \equiv 0$

kein EV!

$\Rightarrow S$ hat kein EW.

<u>EW zu S^*:</u> sei $(x_i)_i = (x_1, \underbrace{\lambda x_1}_{x_2}, \underbrace{\lambda^2 x_1}_{x_3} \ldots)$ für bel. $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow S^*(x_i) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = \lambda (x_i)$,

Allerdings ist nur für $|\lambda| < 1$ die Folge $(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots) \in \ell^2$

$\Rightarrow$ alle λ mit $|\lambda| < 1$ sind EV !?

1 Musterlösung Aufgabe 3 b)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -8 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -10 & 22 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -10 & 22 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & -10 & 22 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 9 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 18 & 22 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 9 & 1 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & -27 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -4 & -2 & -10 \\ 2 & 7 & -10 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) ~~Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ normal.~~

Sei V ein endlich dimensionaler unitärer VR, $\phi \in End(V)$ normal,

d.h. $\phi\phi^* = \phi^*\phi$.

Z: ϕ ist diagonalisierbar.

Beobachtung: Wir können gleich über die Diagonalisierbarkeit der entsprechenden Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(\phi)$ für eine Basis $\mathcal{B}$ sprechen.

Beweis durch Induktion über $n := \dim V$:

IA: $n = 1$ ist klar.

IV: Beh gilt für alle $k \leq n$

IS: Z: IV $\Rightarrow$ Beh für $n+1$.

Sei λ_1 EW von A. (Einen EW gibt es über $\mathbb{C}$, weil das Polynom in Linearfaktoren zerfällt!)

Nach Aufgabe 4 f) Blatt 4 ist

$U_1 := Eig(A; \lambda_1)^\perp$ A-invariant.

Außerdem ist $Eig(A, \lambda_1)$ A-invariant.

Damit ist $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus Eig(A, \lambda_1)$,

und somit gilt

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 E_{d_1} & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right) \text{ mit } \begin{array}{l} d_1 := \operatorname{Dim} Eig(A, \lambda_1) \\ A_1 := A|_{U_1} : U_1 \to U_1 \end{array}$$

Nun ist A_1 diagonalisierbar (nach IV),

womit der Induktionsschritt abgeschlossen ist.

Lösung zu Aufgabe 4 (b) $\longrightarrow$ $\swarrow$ rac (4a)

Da Φ normal ist und $\dim V < \infty$, gibt es eine ONB aus EV von Φ, so dass

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

gilt. Wegen

$$A_\Phi^k = \begin{pmatrix} c_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

folgt für $q = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$

$$q(A_\Phi) = b_0 E_n + b_1 A_\Phi + \ldots + b_m A_\Phi^m = \begin{pmatrix} q(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q(c_n) \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis, dass $q(\Phi)$ eine Isometrie von V ist, g.z.z.: $q(A_\Phi)$ ist unitär, d.h., $\overline{q(A_\Phi)}^\top q(A_\Phi) = E_n$. Wegen

$$0 = p(A_\Phi) = \begin{pmatrix} p(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(c_n) \end{pmatrix}$$

ist $p(c_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und somit $|q(c_i)| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Also

$$\overline{q(A_\Phi)}^\top q(A_\Phi) = \begin{pmatrix} \overline{q(c_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{q(c_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q(c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |q(c_1)|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |q(c_n)|^2 \end{pmatrix} = E_n.$$

/ ///