# Übungsblat 6:
# Lösungsskizzen

**Aufgabe 1** Sei $V$ ein 10-dim $\mathbb{R}$ VR.
Sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$$P_F(t) = (t-2)^5 (t+5)^2 (t-1)^3$$
$$M_F(t) = (t-2)^2 (t+5)^2 (t-1)^2$$

Also: $\lambda_1 = 2,\ r_1 = 5,\ d_1 = 2$
$\lambda_2 = -5,\ r_2 = 2,\ d_2 = 2$
$\lambda_3 = 1,\ r_3 = 3,\ d_3 = 2$

wobei $r_i = \dim(\mathrm{Hau}(F;\lambda_i))$ und $d_i$ ist die Grösse des grössten Jordanblock in $\mathrm{Hau}(F;\lambda_i)$

1) Für $\mathrm{Hau}(F;\lambda_1)$ haben wir die Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & 0 & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

2) Für $\mathrm{Hau}(F;\lambda_2)$ nur $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3) Für $\mathrm{Hau}(F;\lambda_3)$ nur $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & a+d \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = 0$$

**Also**

1) $$\operatorname{Ker} B = \begin{cases} \operatorname{span}(e_1) & \text{für } c \neq 0 \\ \operatorname{span}\left(e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

2) $$\operatorname{Ker} B^2 = \begin{cases} \operatorname{span}(e_1, e_2) & \text{für } c \neq 0 \\ \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) & \text{für } c = 0 \text{ aber } a+d \neq 0 \\ \mathbb{R}^4 & \text{für } c = 0 \text{ und } a+d = 0 \end{cases}$$

3) $$\operatorname{Ker} B^3 = \begin{cases} \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) & \text{für } c \neq 0 \\ \mathbb{R}^4 & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

**Fall 1:** $c \neq 0$. **Definiere** $U_i = \operatorname{Ker} B^i$

$$\mathbb{R}^4 = U_4 = U_3 \oplus \underset{\substack{\operatorname{span}(e_4) \\ (s_4 = 1)}}{\underset{\shortparallel}{W_4}} = U_2 \oplus \underset{\substack{\operatorname{span}(Be_4) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} b \\ d \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (s_3 = 0)}}{\underset{\shortparallel}{W_3}} \oplus W_4$$

$$= U_1 \oplus \underset{\substack{\operatorname{span}(B^2 e_4) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} a+d \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (s_2 = 0)}}{\underset{\shortparallel}{W_2}} \oplus W_3 \oplus W_4 = \underset{\operatorname{span}(B^3 e_4) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{W_1}} \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$$

Sei $$T^{-1} = \begin{pmatrix} c & a+d & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fall 2 $\quad c=0$ und $a+d\neq 0$

$$\mathbb{R}^4 = U_3 = U_2 \oplus \underset{\substack{\| \\ \text{span}(e_4) \\ (s_3=1)}}{W_3} = \overset{\dim U_1 = 2}{U_1} \oplus \underset{\substack{\| \\ \text{span}(Be_4) = \text{span}\begin{pmatrix} b\\ d\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \\ (s_2=0)}}{W_2} \oplus W_3$$

$$= \underset{(s_1=1)}{W_1} \oplus W_2 \oplus W_3 \quad \text{mit } W_1 = \text{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} a+d\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{=B^2e_4}, \begin{pmatrix} 0\\ -a\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

Sei $T^{-1} = \begin{pmatrix} a+d & b & 0 & 0\\ 0 & d & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Fall 3 $\quad c=0$ und $a+d=0$

$$\mathbb{R}^4 = U_2 = U_1 \oplus \underset{(s_2=2)}{W_2} \quad \text{mit } W_2 = \text{span}(e_2, e_4)$$

nicht $e_3$ nehmen, da $Be_3$ Null sein könnte

$$= W_1 \oplus \underset{(s_1=0)}{W_2} \quad \text{mit } W_1 = \text{span}(Be_2, Be_4)$$

$$= \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} b\\ d\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}\right)$$

ist ein Eigenvektor, da $d=-a$

Sei $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0\\ 0 & 1 & d & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

# Aufgabe 3

A) $P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 3 & -4-t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-t & 1 & -3 \\ -7 & -2-t & 9 \\ -2 & -1 & 4-t \end{vmatrix}$

$= \underbrace{(t+1)^2}_{=P_{A_1}} \cdot \underbrace{(-(t-1)(t-2)^2)}_{=P_{A_2}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1, & r_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1, & r_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2, & r_3 = 2 \end{cases}$

$\underbrace{\text{mit } A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Wir können sie separat betrachten.}}$

$A_1)$ $\tilde{A}_1 = A_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\tilde{U}_1 = \operatorname{Ker} \tilde{A}_1 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{U}_2 = \operatorname{Ker} \tilde{A}_1^2 = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}_2 = \tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \oplus \tilde{W}_2 = \tilde{W}_1 \oplus \tilde{W}_2$

$\tilde{W}_2 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{W}_1 = \operatorname{span}\left(\tilde{A}_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Wir erweitern sie zu Vektoren in $\mathbb{R}^5$.

Def $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A_2)$ $\tilde{A}_2 = A_2 - E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -7 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Hau}(A; \lambda_2) = \operatorname{span} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_3}$

$$\tilde{A}_3 = A_2 - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -7 & -4 & 9 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\operatorname{Ker} \tilde{A}_3 = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} \tilde{A}_3^2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{Hau}(A; \lambda_3)$$

$$\tilde{U}_2 = \operatorname{Ker} \tilde{A}_3^2 = \tilde{U}_1 \oplus \tilde{W}_2 = \tilde{W}_1 \oplus \tilde{W}_2$$

$$\tilde{W}_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad (s_2 = 1) \qquad \tilde{W}_1 = \operatorname{span}\left(\tilde{A}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s_1 = 0)$$

Also $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T A T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B) $P_B(t) = (t-2)^4 \Rightarrow \lambda = 2$
$r = 4$

$$\tilde{B} = B - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^4 = 0$$

<u>Also</u> $\mathcal{U}_1 = \operatorname{Ker} \tilde{B} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{U}_2 = \operatorname{Ker} \tilde{B}^2 = \operatorname{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{Ker} \tilde{B}^3 = \operatorname{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{U}_4 = \mathbb{R}^4$$

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_3 \oplus \underbrace{W_4}_{\operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ (s_4 = 1)} = \mathcal{U}_2 \oplus \underbrace{W_3}_{\operatorname{span}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{B}e_4} \oplus W_4 = \mathcal{U}_1 \oplus \underbrace{W_2}_{\operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B}^2 e_4} \oplus W_2 \oplus W_4$$

$$= \underbrace{\mathcal{W}_1}_{\operatorname{span}(\tilde{B}^3 e_4) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}} \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 4

Sei $R$ ein Ring

a) $N := \{ r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n = 0 \}$

- Seien $x, y \in N$ und $z \in R$ beliebig

$\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $x^{n_1} = y^{n_2} = 0$

$\Rightarrow (x-y)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$ $(m \in \mathbb{N})$

(Da $R$ kommutator ist, gilt der Binomial theorem)

Es muss gelten: $\begin{cases} k < n_1 \\ m-k > n_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k < n_1 \\ k > m - n_2 \end{matrix}$

(Sonst ist der Summand Null)

$\Rightarrow$ Für $m$ gross genug ist die Summe leer

$\Rightarrow \exists m$ so, dass $(x-y)^m = 0 \Rightarrow x-y \in N$

- $(xz)^{n_1} = (zx)^{n_1} = z^{n_1} x^{n_1} = 0$

$\Rightarrow xz \in N \quad \forall z \in R$

$\Rightarrow N$ ist ein Ideal.

b) Sei $I \subset R$ ein Ideal und sei $x \in I$ invertierbar $\Rightarrow \exists y \in R$ mit $xy = yx = 1$

Da $x \in I$, folgt $1 \in I$

$\Rightarrow \forall z \in R$ gilt $z = 1 \cdot z \in I$ da $1 \in I$

$\Rightarrow R = I$

c) Sei $R$ ein kommutativer Ring

Es gilt

1) $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe
2) Die Multiplikation ist distributiv
3) Die Multiplikation ist kommutativ und assoziativ
4) Sei $I \subset R$ Ideal $\Rightarrow I = \{0\}$ oder $I = R$

Es bleibt zu zeigen: $\forall x \in R \setminus \{0\} \;\exists y$ mit $xy = 1$

<u>Beweis</u>: Sei $x \in R$, $x \neq 0$

Definiere die Menge $S = \left\{ z x^n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ z \in R \end{array} \right\}$

<u>S ist ein Ideal</u> da

- $z_1 x^n - z_2 x^n = (z_1 - z_2) x^n \in S$
- $z(z_1 x^n) = (z z_1) x^n \in S$

$\Rightarrow S = \{0\}$ oder $S = R$

Der Fall $S = \{0\}$ impliziert $x = 0$ und ist also nicht möglich

$\Rightarrow S = R \Rightarrow \exists z \in R$ und $m \in \mathbb{N}$ mit

$$z x^m = 1 = \underbrace{(z x^{m-1})}_{= y} x$$

$\Rightarrow x$ ist invertierbar

$\square$