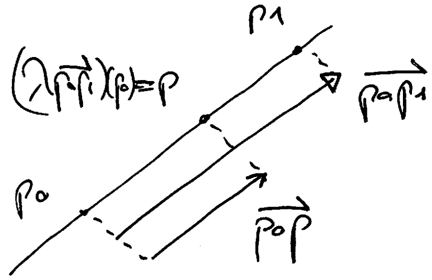
Übungsblatt 7: Lösungsskizzen

Aufgabe 1 Sei X ein affiner Raum über $\mathbb{K}$.
Sei $Y \subset X$ eine Gerade. Seien $p_0, p_1, p \in Y$
mit $p_0 \neq p_1$. Für alle $p \in Y$ $\exists!$ λ mit

$$(\lambda \overrightarrow{p_0 p_1})(p_0) = p$$



$$\Rightarrow \lambda \overrightarrow{p_0 p_1} = \overrightarrow{p_0 p}$$

$$\Rightarrow TV(p_0, p_1, p) := \lambda$$

$$p_0 = (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}), \quad p_1 = (x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)})$$
$$p = (x_1, \dots x_n)$$

Da $p_0 \neq p_1$ $\exists$ mindestens ein $i \in \{1, \dots n\}$
mit $x_i^{(0)} \neq x_i^{(1)}$

Dann $TV(p_0, p_1, p) = \dfrac{x_i - x_i^{(0)}}{x_i^{(1)} - x_i^{(0)}}$, denn

$\lambda \overrightarrow{p_0 p_1} = \overrightarrow{p_0 p}$ impliziert

$$\lambda (x_j^{(1)} - x_j^{(0)}) = x_j - x_j^{(0)}$$

$\Rightarrow$ 1) $x_j^{(1)} = x_j^{(0)} \Rightarrow x_j = x_j^{(0)}$

2) $x_j^{(1)} \neq x_j^{(0)} \Rightarrow \lambda = \dfrac{x_j - x_j^{(0)}}{x_j^{(1)} - x_j^{(0)}}$

Aufgabe 2

a) $p \vee q = \bigcap_{\substack{\text{affine } Y \subset X \\ \{p,q\} \subset Y}} Y$

alternativ : $p \vee q = Y$ mit
1) $Y \subset X$ affin
2) $\{p,q\} \subset Y$
3) $\forall Y' \subset X$ affin mit $\{p,q\} \subset Y'$ gilt $Y \subset Y'$

Aus 2) folgt $\dim Y \geq 1$
Da $Y = \{ (\lambda \overrightarrow{pq})(p) : \lambda \in \mathbb{K} \}$ eine Gerade ($\dim Y = 1$) ist und da $p \in Y$ ($\lambda = 0$) und $q \in Y$ ($\lambda = 1$), folgt $p \vee q = Y$

b) $Y_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Y_1 und Y_2 sind zwei windschiefe Geraden in $\mathbb{R}^3$

$p_1 \in Y_1 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $p_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$

$p_2 \in Y_2 \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$ mit $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mu \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p_1 p_2} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1+\mu \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$

$x \in p_1 \vee p_2 \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ mit $x = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1+\mu \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1-t) \\ t(1+\mu) \\ t - \lambda(1-t) \end{pmatrix}$$

Es folgt : 1) $t = x_1 + x_3$

2) $x_2 = (x_1+x_3)(1+\mu)$

$\Rightarrow$ a) $x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

b) $x_1 + x_3 \neq 0 \Rightarrow \mu = \dfrac{x_2 - x_1 - x_3}{x_1 + x_3}$

3) $x_1 = \lambda(1 - x_1 - x_3)$

$\cancel{x_3} = x_1 + \cancel{x_3} - \lambda(1 - x_1 - x_3) \Rightarrow x_1 = \lambda(1 - x_1 - x_3)$

a) $x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$

b) $x_1 + x_3 \neq 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x_1}{1 - x_1 - x_3}$

Wir sehen also, dass die Punktmenge M

$M := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0 \wedge x_2 \neq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 1 \wedge x_1 \neq 0\}$

die Menge aller Punkte x in $\mathbb{R}^3$ ist für die gilt

$x \notin p_1 \vee p_2 \quad \forall\, p_1 \in Y_1$ und $p_2 \in Y_2$

Aufgabe 3 Seien $(X, V_X, \rightarrow)$, $(X', V_{X'}, \rightarrow)$ affine Räume. $f : X \to X'$ ist affin

$\Leftrightarrow \exists\, F_f : V_X \to V_{X'}$ $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

mit $\overrightarrow{f(p)f(q)} = F_f(\overrightarrow{pq}) \quad \forall p, q \in X$

a) f injektiv $\Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

$\Leftrightarrow (\vec{0} = \overrightarrow{f(x)f(y)} \Rightarrow \vec{0} = \overrightarrow{xy})$

$\Leftrightarrow (\vec{0} = F_f(\overrightarrow{xy}) \Rightarrow \vec{0} = \overrightarrow{xy})$

$\Leftrightarrow F_f$ ist injektiv

f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\left(\forall y \in X' \ \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y \right)$

$\Leftrightarrow$ (Sei $y_0 \in X'$ mit $y_0 = f(\cancel{x_0})$. Dann gilt

$\forall y \in X' \ \exists x \in X$ mit $\overrightarrow{y_0 y} = F_f(\overrightarrow{x_0 x})$))

$\Leftrightarrow$ F_f ist surjektiv

b). Aus a) folgt, dass F_f invertierbar ist.

f ist affin $\Rightarrow$ $\forall p, q \in X$ gilt

$\overrightarrow{f(p) f(q)} = F_f(\overrightarrow{pq})$

Setze $p = f^{-1}(x)$, $q = f^{-1}(y)$ (x & y sind eindeutig)

$\Rightarrow \overrightarrow{xy} = F_f(\overrightarrow{f^{-1}(x) f^{-1}(y)})$

$\Rightarrow \overrightarrow{f^{-1}(x) f^{-1}(y)} = F_f^{-1}(\overrightarrow{xy}) \quad \forall x, y \in X'$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist affin und $F_{f^{-1}} = F_f^{-1}$ $\square$

c) $f : X \to X'$ affin $\Leftrightarrow$ ~~$\forall p, q \in X$~~

$\exists F_f : V_X \to V_{X'}$ linear mit

$\overrightarrow{f(p) f(q)} = F_f(\overrightarrow{pq}) \ \forall p, q \in X$

$g : X' \to X''$ affin $\Leftrightarrow$ $\exists F_g : V_{X'} \to V_{X''}$ linear

mit $\overrightarrow{g(p') g(q')} = F_g(\overrightarrow{p'q'}) \ \forall p', q' \in X'$

$\Rightarrow \overrightarrow{g(f(p)) g(f(q))} = F_g(\overrightarrow{f(p) f(q)}) = F_g(F_f(\overrightarrow{pq})) \ \forall p, q \in X$

$\Rightarrow g \circ f$ ist affin und $F_{g \circ f} = F_g \circ F_f$

d) Sei $f: X \longrightarrow X'$ affin

$Y \subset X$ ist ein affiner Untervektorraum falls

$Y = \emptyset$ oder $\exists p \in Y$ mit $V_Y := \{\overrightarrow{pq} \in V_X : q \in Y\}$ ist ein Untervektorraum von V_X

- $Y = \emptyset$ ist trivial
- $\forall p, q \in Y$ ist $\overrightarrow{pq} \in V_Y$

f ist affin $\Rightarrow \forall p, q \in Y$ ist $\overrightarrow{f(p)f(q)} = F_f(\overset{\overset{V_Y}{\Psi}}{\overrightarrow{pq}})$

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f|_Y(p) f|_Y(q)} \qquad F_f(\overrightarrow{pq}) = (F_f|_{V_Y})(\overrightarrow{pq})$$

$\Rightarrow f|_Y$ ist affin und $F_{f|_Y} = F_f|_{V_Y}$

Aufgabe 4

a) - $e \in Stab_G(x)$ da $\tau_e(x) = x \quad \forall x \in X$

- $a \in Stab_G(x) \Rightarrow \tau_{a^{-1}}(x) = \tau_{a^{-1}}(\tau_a(x))$
$= \tau_{a^{-1}a}(x) = \tau_e(x) = x$
$\Rightarrow a^{-1} \in Stab_G(x)$

- $a, b \in Stab_G(x) \Rightarrow \tau_{ab}(x) = \tau_a \tau_b(x) = \tau_a(x) = x$
$\Rightarrow ab \in Stab_G(x)$

b) Annahme : $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Sei $z \in G(x) \cap G(y)$

$\Rightarrow \exists g, h \in G$ mit $\tau_g(x) = z$ und $\tau_h(y) = z$

$\tau_g(x) = \tau_h(y) \Rightarrow y = \tau_{h^{-1}g}(x) \Rightarrow y \in G(x)$

Sei $w \in G(y) \Rightarrow w = \tau_a(y)$ für ein $a \in G$

$\Rightarrow w = \tau_{ah^{-1}g}(x) \Rightarrow w \in G(x) \Rightarrow G(y) \subset G(x)$

da $x = \tau_{g^{-1}h}(y)$ folgt auch $G(x) \subset G(y) \Rightarrow G(x) = G(y)$

c) Hier gab es ein Notationsfehler in der Aufgabestellung

$S^2 := \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \}$, nicht S^3

1) $\forall\, x, y \in S^2 \; \exists\, g \in SO(3)$ mit $g.x = y$

g ist die Rotation um der Axis $x \times y$ um den Winkel θ, wobei $\cos\theta = x \cdot y$

$\Rightarrow SO(3)(x) = S^2 \;\; \forall\, x \in S^2$

2) $\forall\, x \in S^2$ gilt $gx = x \;\; \forall\, g$ Rotationen in der Ebene senkrecht zu x.

$\forall\, x \in S^2$

Also $\mathrm{Stab}_{SO(3)}(x) \simeq SO(2)$

isomorph zu

d)

Allgemeine Definition

Seien $\{i_1, \dots, i_k\} \in \{1, \dots, n\}$

<u>Def</u>: $(i_1, \dots, i_k) \in S_n$ durch

- $(i_1, \dots, i_k)(i_s) = i_{s+1} \quad (i_{k+1} \equiv i_1)$
- $(i_1, \dots, i_k)(x) = x$ falls $x \notin \{i_1, \dots, i_k\}$

$(i_1, \dots, i_k)$ wird <u>Zyklus</u> genannt.

<u>z.B.</u> $(12) \in S_3$ wirkt folgendermassen

$(12)(1) = 2, \; (12)(2) = 1, \; (12)(3) = 3$

Alle $g \in S_n$ lassen sich schreiben als Produkte von Zyklen. (nicht eindeutig)

<u>Bem</u>: Die Zyklen der Länge 1, also (i), $i = 1, \dots, n$ sind alle gleich der Identität

S_3 Wir schreiben die Elemente in S_3 so:

$(1)(2)(3)$, $(12)(3)$, $(13)(2)$, $(23)(1)$, (123), (132)

Man rechnet leicht, dass

- $S_3((1)(2)(3)) = (1)(2)(3)$
  $\mathrm{Stab}_{S_3}((1)(2)(3)) = S_3$
- $S_3((12)(3)) = \{(12)(3), (13)(2), (23)(1)\}$
  $\mathrm{Stab}_{S_3}((12)(3)) = \{(1)(2)(3), (12)(3)\} \simeq S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$
- $S_3((13)(2)) = S_3((23)(1)) = S_3((12)(3))$
  $\mathrm{Stab}_{S_3}((13)(2)) = \{(1)(2)(3), (13)(2)\} \simeq S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$
  $\mathrm{Stab}_{S_3}((23)(1)) = \{(1)(2)(3), (23)(1)\} \simeq S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$
- $S_3((123)) = S_3((132)) = \{(123), (132)\}$

$\mathrm{Stab}_{S_3}((123)) = \{(1)(2)(3), (123), (132)\} \simeq \mathbb{Z}_3$

$= \mathrm{Stab}_{S_3}((132))$

Dann

$M = \{S_3((1)(2)(3)), S_3((12)(3)), S_3((123))\}$

$= S_3$