LAAG II*: Musterlösung zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

a) Sei $x \in X_1 \cap X_2$ und sei o.B.d.A. $V_{X_1} \subseteq V_{X_2}$.

Dann ist $X_1 = x + V_{X_1} \subseteq p + V_{X_2} = X_2$.

Speziell gilt auch:

X_1 parallel zu X_2, $\dim X_1 = \dim X_2$ und $X_2 \cap X_1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow X_1 = X_2$.

b) Sei $f: X \to Y$ affin, $X_1, X_2 \subset X$ parallel mit o.B.d.A. $V_{X_1} \subseteq V_{X_2}$.

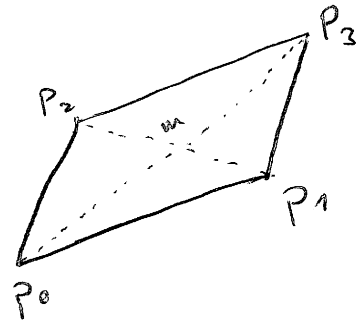
Es gilt:

$V_{f(X_1)} = F_f(V_{X_1}) \subseteq F_f(V_{X_2}) = V_{f(X_2)}$.

Also: $V_{f(X_1)} \subseteq V_{f(X_2)}$, damit sind $f(X_1)$ und $f(X_2)$ parallel.

Aufgabe 2:

a)



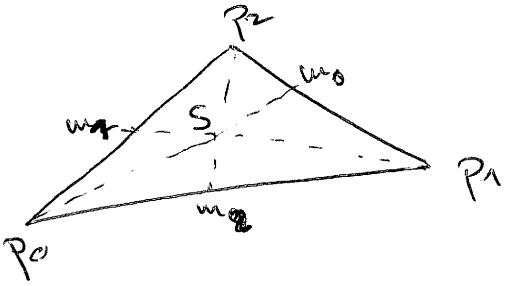
Es gilt: $\overrightarrow{p_0p_1} = \overrightarrow{p_2p_3}$ und $\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_2p_3}$ sind linear unabhängig. Es folgt: $\overrightarrow{p_0p_2} = \overrightarrow{p_1p_3}$.
Sei m der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt:

$$m = p_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{p_0p_3} = p_0 + \lambda \overrightarrow{p_0p_1} + \lambda \overrightarrow{p_1p_3}$$
$$= p_1 + \mu \overrightarrow{p_1p_2} = p_0 + \overrightarrow{p_0p_1} + \mu \left(\overrightarrow{p_1p_0} + \overrightarrow{p_0p_2}\right)$$
$$= p_0 + \overrightarrow{p_0p_1} - \mu \cdot \overrightarrow{p_0p_1} + \mu \overrightarrow{p_0p_2}$$
$$= p_0 + (1-\mu) \overrightarrow{p_0p_1} + \mu \cdot \overrightarrow{p_1p_3}$$

$(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Koeffizientenvergleich liefert:
$\lambda = 1 - \mu = \mu \implies \lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

b)



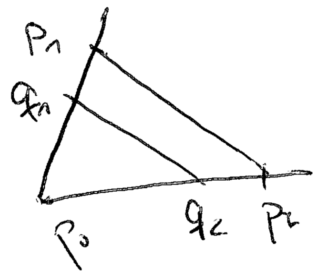
$$S = p_0 + \lambda \overrightarrow{p_0m_0} = p_0 + \lambda\left(\overrightarrow{p_0p_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_1p_2}\right)$$
$$= p_0 + \lambda\left(\overrightarrow{p_0p_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_0p_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{p_0p_1}\right)$$
$$= p_0 + \frac{1}{2}\lambda \overrightarrow{p_0p_1} + \frac{1}{2}\lambda \overrightarrow{p_0p_2}$$
$$= p_1 + \mu \cdot \overrightarrow{p_1m_1} = p_0 + \overrightarrow{p_0p_1} + \mu \cdot \left(-\overrightarrow{p_0p_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_0p_2}\right)$$
$$= p_0 + (1-\mu)\overrightarrow{p_0p_1} + \frac{1}{2}\mu \overrightarrow{p_0p_2}$$
$$= p_2 + \nu \cdot \overrightarrow{p_2m_2} = p_0 + \overrightarrow{p_0p_2} + \nu \cdot \left(-\overrightarrow{p_0p_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p_0p_1}\right)$$
$$= p_0 + \frac{1}{2}\nu \overrightarrow{p_0p_1} + (1-\nu)\overrightarrow{p_0p_2}$$

$\overrightarrow{p_0p_1}$ und $\overrightarrow{p_0p_2}$ sind linear unabhängig. (3)
Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 1-\mu = \tfrac{1}{2}\nu \quad \text{und}$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2}\mu = 1-\nu$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = \mu = \nu = \tfrac{2}{3}.$$

Für die Punkte $s_i := p_i + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{p_i m_i}$ $(i=0,1,2)$
gilt: $s_1 = s_2 = s_3$.

c)



Es gilt: $\overrightarrow{p_0q_1} = \underbrace{\lambda}_{=TV(p_0,p_1,q_1)}\cdot\overrightarrow{p_0p_1}$ und $\overrightarrow{p_0q_2} = \underbrace{\mu}_{=TV(p_0,p_2,q_2)}\cdot\overrightarrow{p_0p_2}$, $\lambda,\mu \in K$

Damit gilt:

$$\overrightarrow{q_1q_2} = -\overrightarrow{q_1p_0} + \overrightarrow{p_0q_2} = -\lambda\,\overrightarrow{p_0p_1} + \mu\cdot\overrightarrow{p_0p_2}$$
$$= \lambda(\overrightarrow{p_0p_2} - \overrightarrow{p_0p_1}) + (\mu-\lambda)\,\overrightarrow{p_0p_2}$$
$$= -\lambda(\overrightarrow{p_1p_0} + \overrightarrow{p_0p_2}) + (\mu-\lambda)\,\overrightarrow{p_0p_2}$$
$$= \lambda\,\overrightarrow{p_1p_2} + (\mu-\lambda)\,\overrightarrow{p_0p_2}.$$

Da $\overrightarrow{p_1p_2}$ und $\overrightarrow{p_0p_2}$ linear unabhängig sind, folgt:

$p_1 \vee p_2$ und q_1q_2 parallel

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{p_1p_2}$ und $\overrightarrow{q_1q_2}$ parallel

$\Rightarrow$ $\mu - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$

$\Rightarrow$ $TV(p_0,p_1,q_1) = \lambda = \mu = TV(p_0,p_2,q_2)$

Aufgabe 3:

a) "$\Leftarrow$": Seien $v = (v_1, \ldots, v_n)^t$, $w = (w_1, \ldots, w_n)^t \in K^n$.

Dann gilt:

$$F(v+w) = F\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \overset{\text{Vor.}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(v_1 + w_1) \\ \vdots \\ \alpha(v_n + w_n) \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(v_1) + \alpha(w_1) \\ \vdots \\ \alpha(v_n) + \alpha(w_n) \end{pmatrix} \quad \text{Def. Automorphism.}$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(v_1) \\ \vdots \\ \alpha(v_n) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(w_1) \\ \vdots \\ \alpha(w_n) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Vor.}}{=} F\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = F(v) + F(w).$$

Sei $\lambda \in K$. Dann gilt weiter:

$$F(\lambda \cdot v) = F\begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix} \overset{\text{Vor.}}{=} A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(\lambda \cdot v_1) \\ \vdots \\ \alpha(\lambda \cdot v_n) \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) \cdot \alpha(v_1) \\ \vdots \\ \alpha(\lambda) \cdot \alpha(v_n) \end{pmatrix} \quad \text{Def. Automorphismus}$$

$$= \alpha(\lambda) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(v_1) \\ \vdots \\ \alpha(v_n) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Vor.}}{=} \alpha(\lambda) \cdot F\begin{pmatrix} \cancel{x_1}\, v_1 \\ \vdots \\ \cancel{x_n}\, v_n \end{pmatrix} = \alpha(\lambda) \cdot F(v).$$

Damit ist F semilinear.

"$\Rightarrow$": Sei F semilinear, d.h. es gibt einen ⑤
Automorphismus $\alpha: K \to K$ und es gilt:

- $F(v+w) = F(v) + F(w)$ und
- $F(\lambda \cdot v) = \alpha(\lambda) \cdot F(v)$

$\forall v, w \in K^n, \lambda \in K$.

Sei nun $v \in K^n$ beliebig und seien $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Einheitsvektoren in K^n, dann gilt:
$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ für gewisse $\lambda_i \in K$.

Nun gilt:

$$F(v) = F(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \overset{\text{Vor.}}{=} \sum_{j=1}^n \alpha(\lambda_j) \cdot F(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha(\lambda_j) \cdot \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \sigma(\lambda_j) \right) e_i$$

für $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in K$.

Setze $A := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, so gilt $\forall x = (x_1, \dots, x_n)^t \in K^n$:

$$F(x) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha(x_1) \\ \vdots \\ \alpha(x_n) \end{pmatrix}.$$

b) (i) $0 \in G(V')$:

z.z.: $\exists z \in V'$ mit: $G(z) = 0$

α Auto. $\Rightarrow$ $\exists \lambda \in K$ mit $\alpha(\lambda) = 0$

V' Untervektorraum $\Rightarrow$ $\forall z \in V'$: $\lambda z \in V'$.

Sei $z \in V'$ beliebig. Dann gilt:

$$\underbrace{G(\lambda z)}_{\in V'} \overset{G \text{ semilinear}}{=} \underbrace{\alpha(\lambda)}_{=0} \cdot G(z) = 0 \in G(V')$$

(ii) $G(x), G(y) \in G(V') \Rightarrow G(x) + G(y) \in V'$:

Seien $x, y \in V'$. Dann gilt:

$$G(x)+G(y) \overset{G \text{ semilinear}}{=} G(\underbrace{x+y}_{\in V', \text{ da } V' \text{ UVR}}) \in G(V').$$

(iii) $\alpha(\lambda) \in K$, $G(x) \in G(V') \Rightarrow \alpha(\lambda)\cdot G(x) \in G(V')$

Seien $\lambda \in K$ und $x \in V'$. Da gilt:

$$\alpha(\lambda)\cdot G(x) \underset{G \text{ semilinear}}{=} G(\underbrace{\lambda \cdot x}_{\in V', \text{ da } V' \text{ UVR}}) \in G(V').$$

Also ist $G(V')$ Untervektorraum von W.

Sei G injektiv und sei $v_1, \dots, v_n \in V'$ eine Basis von V'. Zeige:

$G(v_1), \dots, G(v_n)$ sind K-linear unabhängig.

Sei also $c_1 \cdot G(v_1) + \dots + c_n \cdot G(v_n) = 0$, $c_i \in K$

α Automorphismus

$\Rightarrow \exists b_i \in K$ mit $\alpha(b_i) = c_i$, $i = 1, \dots, n$

$$\overset{G \text{ semi-}}{\underset{\text{linear}}{\Longrightarrow}} G(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) = 0$$

$$\overset{G \text{ injektiv}}{\underset{\text{und } G(0)=0}{\Longrightarrow}} b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = 0$$

$$\overset{v_1, \dots, v_n \text{ Basis}}{\Longrightarrow} b_1 = \dots = b_n = 0$$

$$\overset{\alpha \text{ Auto}}{\Longrightarrow} c_1 = \dots = c_n = 0$$

$\Rightarrow G(v_1), \dots, G(v_n)$ K-linear unabhängig

Also gilt: $\dim V' = \dim G(V')$.

Aufgabe 4:

a) Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so dass gilt:
$f(x) = x$ und $f(y) = y$
für Dilatation $f: X \to X$.
Es gilt:
$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{f(x)f(y)} = F_f(\overrightarrow{xy}) \underset{\substack{\uparrow \\ f\text{ Dilatation}}}{=} \lambda \cdot id_{V_X}(\overrightarrow{xy}) = \lambda \cdot \overrightarrow{xy}$$

$\Rightarrow \lambda = 1$.
Sei nun $z \in X$ beliebig. Dann gilt:
$$f(z) = f(x) + \overrightarrow{f(x)f(z)}$$
$$\overset{x \text{ Fixpunkt}}{=} x + \overrightarrow{f(x)f(z)}$$
$$\overset{f \text{ Dilatation}}{=} x + \lambda \cdot \overrightarrow{xz}$$
$$\overset{\lambda=1}{=} x + \overrightarrow{xz} = z$$
Somit gilt für alle $x \in X$: $f(x) = x$,
also ist f die Identität.

b) "$\Rightarrow$" Sei $f: X \to X$ eine Dilatation, d.h. es gilt:
$F_f = \lambda \cdot id_{V_X}$ für ein $\lambda \in K$.
Sei nun $Y \subset X$ eine beliebige Gerade mit $p, q \in Y$
$p \neq q$. Dann gilt:
$F_f(\overrightarrow{pq}) = \lambda \cdot \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{f(p)f(q)}$,
d.h. $\overrightarrow{pq}$ und $\overrightarrow{f(p)f(q)}$ sind linear abhängig,
also ist $V_Y \subset V_{f(Y)}$ oder $V_{f(Y)} \subset V_Y$,
somit sind Y und $f(Y)$ parallel.
"$\Leftarrow$" Seien $p, q \in X$ mit $p \neq q$ beliebig. Sei
Y die Gerade mit $p, q \in Y$. Nach Voraussetzung
ist $f(Y)$ parallel zu Y und $f(p), f(q) \in f(Y)$.

Also gilt: $V_y \subset V_{f(y)}$ oder $V_{f(y)} \subset V_y$, (8)

also sind $V_y \ni \overrightarrow{pq}$ und $\overrightarrow{f(p)f(q)} \in V_{f(y)}$ linear abhängig, d.h. es gibt $\lambda \in K$ mit

$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \lambda \cdot \overrightarrow{pq}$. Somit gilt:

$F_f(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \lambda \cdot \overrightarrow{pq} = \lambda \cdot id_{V_X}(\overrightarrow{pq})$,

also ist f eine Dilatation.