Übungsblatt 10: Lösungsskizzen

Aufgabe 1: Seien $P_i \in \mathbb{R}^2$ $(i=1,\dots,5)$, keine drei davon liegen auf eine Gerade.

a) $A := (P_1' \times P_2')(P_3' \times P_4')^t \in M(3\times 3; \mathbb{R})$

wobei $(P_i')^t = (1, P_i) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow P^t A P = \underbrace{\langle P, P_1' \times P_2' \rangle}_{=0 \text{ da } P = aP_1' + bP_2' \perp P_1' \text{ und } P_2'} \langle P_3' \times P_4', P \rangle$

b) $B = A + A^t$ ist symmetrisch und
$Q_B = \{ x \in \mathbb{R}^2 : (1\ x^t)\, B \binom{1}{x} = 0 \}$ ist eine Quadrik

Wir betrachten die Gerade

$G_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x = \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2 \}$

Für $x \in G_1$ ist $x' = \binom{1}{x} = \binom{1}{\lambda p_1 + (1-\lambda) p_2} = \binom{\lambda + 1-\lambda}{\lambda p_1 + (1-\lambda) p_2}$
$= \lambda p_1' + (1-\lambda) p_2'$

Aus a) folgt $(x')^t B x' = 0 \quad \forall \lambda \Rightarrow G_1 \subset Q_B$

Dasselbe gilt auch für die Gerade

$G_2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } x = \mu p_3 + (1-\mu) p_4 \}$

$G_1 \neq G_2$ nach Annahme.

$\Rightarrow Q_B$ besteht aus ein Geradepaar, nämlich aus den Geraden P_1P_2 und P_3P_4

c) Sei $C = (P_1' \times P_3')(P_2' \times P_4')^t + (P_2' \times P_4')(P_1' \times P_3')^t$

Q_C enthält die Geraden P_1P_3 und P_2P_4

$\Rightarrow$ Die Quadrik Q_D mit $D = \lambda B + \mu C$
($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ nicht beide gleichzeitig Null)
enthält die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4

Wir wollen P_5 in Q_D haben $\Rightarrow (P_5')^t D P_5' \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda = \alpha (P_5')^t C P_5'$, $\mu = -\alpha (P_5')^t B P_5'$

wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Also $Q_D = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \binom{1}{x}^t D \binom{1}{x} = 0 \}$
mit $D = \left[(P_5')^t C P_5'\right] B - \left[(P_5')^t B P_5'\right] C$
enthält alle Punkte.

<u>Aufgabe 2</u> $\quad G = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow G = p + \mathbb{R} v$ mit $p = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow G = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Bx = b \}$ mit $B \in M(2\times 3; \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$

$Bv \overset{!}{=} 0$ und $\mathrm{Rang}(B) = 2$

Wir wählen $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow b = B \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \binom{3}{2}$

$\Rightarrow \tilde{G} = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0 \right\}$

Aufgabe 3

a) $Z \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ist eine projektive Gerade

$\Rightarrow$ 1) Z ist ein proj. Unterraum

2) $\dim Z = 1$

$\Rightarrow W := \bigcup_{p \in Z} p$ ist ein Untervektorraum in $\mathbb{R}^3$

mit $\dim W = 2$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{R}^3, n^t = (a_0, a_1, a_2), n \neq 0$ mit

$W = \{ x \in \mathbb{R}^3, n^t x = 0 \}$

Sei $(x_0 : x_1 : x_2) \in Z \Rightarrow (x_0 : x_1 : x_2) = \mathbb{R} v, v \in W \setminus \{0\}$

$v^t = (x_0, x_1, x_2)$. Da $n^t v = 0 = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ eine Bedingung ist, die nicht von der Repräsentanten abhängt, bekommen wir eine wohldefinierte Bedingung für $(x_0 : x_1 : x_2)$

$\Rightarrow Z \subset \{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ mit $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \}$

Sei $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ mit $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$

$\Rightarrow (x_0 : x_1 : x_2) = \mathbb{R} v$ mit $v \in W \Rightarrow (x_0 : x_1 : x_2) \in Z$

$\Rightarrow Z = \{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \}$

- da $\dim W = 2$ ist $\dim W^\perp = 1$

Also gilt $\forall v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $v^t x = 0 \; \forall x \in W$

dass $v = \lambda n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow p(Z) := \mathbb{R} n$ ist eindeutig von Z bestimmt

(Es gibt im $\mathbb{R}^3$ nur eine Gerade durch 0, die senkrecht zu W steht.)

b) $\{q\} = Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$

$q = \mathbb{R}u \quad , u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$p(Z_i) = \mathbb{R}n_i \quad , n_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$n_i^t u = 0$ da $q \in Z_i$, $i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow n_i \in \mathcal{U} := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid u^t \cdot x = 0 \} \quad \forall i$

$\dim \mathcal{U} = 2$ solange nicht $Z_1 = Z_2 = Z_3$

$\Rightarrow p(Z_i) \in \mathbb{P}(\mathcal{U})$, $\dim \mathbb{P}(\mathcal{U}) = 1$

Also stehen die $p(Z_i)$ alle auf eine Gerade

c) $$DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}}$$

(p_0, p_1, p_2 sind alle verschieden)

$\Rightarrow DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = DV(p_0, p_1, p_3, p_2)^{-1} = DV(p_1, p_0, p_2, p_3)^{-1}$
ist offensichtlich solange p_3 auch von p_0, p_1, p_2 verschieden ist.

- $DV(p_0, p_1, p_2, p_3) + DV(p_0, p_2, p_1, p_3)$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} \left(\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \mu_0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} \Big(\lambda_3\mu_1\lambda_2\mu_0 - \cancel{\lambda_3\mu_1\mu_2\lambda_0} - \cancel{\mu_3\lambda_1\lambda_2\mu_0} + \mu_3\lambda_1\mu_2\lambda_0$$
$$- \lambda_3\mu_2\lambda_1\mu_0 + \cancel{\lambda_3\mu_2\mu_1\lambda_0} + \cancel{\mu_3\lambda_2\lambda_1\mu_0} - \mu_3\lambda_2\mu_1\lambda_0 \Big)$$

$= 1$

d) Seien $a, b, c, d, e \in P_1(\mathbb{R})$ alle verschieden

$x = (x_0 : x_1)$ für $x = a, b, c, d, e$

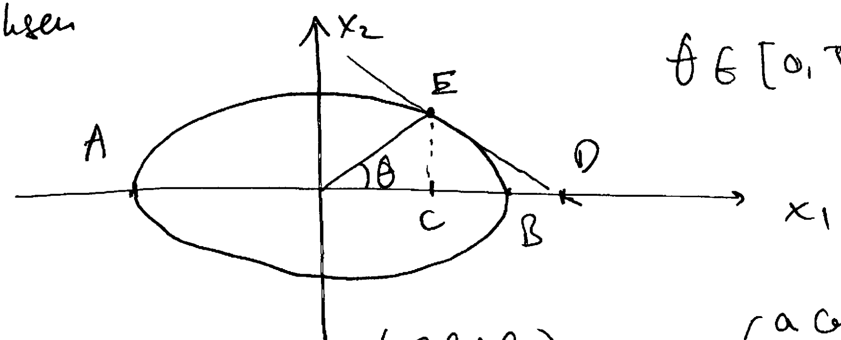
$$DV(a,b,c,d)\, DV(a,b,d,e)\, DV(a,b,e,c)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} e_0 & b_0 \\ e_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_0 & a_0 \\ e_1 & a_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e_0 & a_0 \\ e_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e_0 & b_0 \\ e_1 & b_1 \end{vmatrix}} = 1$$

e) Wir verwenden Koordinaten so, daß der Ursprung in der Mitte der Ellipse liegt und die x-Achse entlang der grossen Hauptachse ist.

Seien $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \geq b$, die Längen der Hauptachsen

$\theta \in [0, \pi/2)$



$A = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$

$DE = E + \mathbb{R}v$ mit $v = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow \lambda = -\tan\theta$

$\Rightarrow d = a\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cos\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$DV(A,B,C,D) = \frac{-a - a\cos\theta}{a - a\cos\theta} \cdot \frac{a - \frac{a}{\cos\theta}}{-a - \frac{a}{\cos\theta}} = -1$$

Aufgabe 4 Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum
Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{P}(V)$ proj. Unterräume
mit $\dim \mathcal{U}_1 = \dim \mathcal{U}_2$

Sei $f: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ eine Projektivität mit $f|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = id$

a) z.z. $\exists Z \subset \mathbb{P}(V)$ mit

1. $Z \vee \mathcal{U}_1 = Z \vee \mathcal{U}_2 = \mathbb{P}(V)$
2. $Z \cap \mathcal{U}_1 = Z \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$
3. $f(p) = (Z \vee p) \cap \mathcal{U}_2 \quad \forall p \in \mathcal{U}_1$

Beweis: Wir schreiben $\mathcal{U}_i = \mathbb{P}(V_i)$,
$Z = \mathbb{P}(W)$, $f = \mathbb{P}(F)$

Nach [F3] Seite 150 sind 1 und 2 zusammen äquivalent zu (*): $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$

3 ist äquivalent zu
(**): $\mathbb{K} F(v) = (W \oplus \mathbb{K} v) \cap V_2 \quad \forall v \in V_1 \setminus \{0\}$

($F: V_1 \to V_2$ ist linear und bijektiv,
da f eine Projektivität ist)

Wir führen Basen ein
$V_1 \cap V_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(u_1, \ldots, u_r)$
$V_i = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(u_1, \ldots, u_r, v_1^{(i)}, \ldots, v_s^{(i)}) \quad i = 1,2$

$f|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = id \Leftrightarrow F|_{V_1 \cap V_2} = \lambda\, id \quad , \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Wähle die Basen so, dass $F(v_j^{(1)}) = v_j^{(2)}$
für $j = 1, \ldots, s$

Seien weiter $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ und (4)

definiere $W' = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(\underbrace{\alpha v_1^{(1)} + \beta v_1^{(2)}}_{=: w_1}, \dots, \underbrace{\alpha v_s^{(1)} + \beta v_s^{(2)}}_{=: w_s})$

Die Vektoren $w_1, \dots, w_s$ sind lin. unabhängig, da aus $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_s w_s = 0$ folgt

$(\alpha \mathrm{id} + \beta F)(\alpha_1 v_1^{(1)} + \dots + \alpha_s v_s^{(1)}) = 0$

$\Rightarrow \exists\, v \in V_1 \setminus V_1 \cap V_2$ mit $\underbrace{F(v)}_{\in V_2} = -\frac{\alpha}{\beta} v$

$\Rightarrow v \in V_1 \cap V_2$ $\lightning$

- $\exists\, W''$ (nicht eindeutig) mit
$V_1 \oplus W' \oplus W'' = V$ $\Rightarrow$ Definiere $W := W' \oplus W''$

$\Rightarrow V_1 \oplus W = V$

$V_2 \oplus W = V$ da $V_1 \oplus W' = V_2 \oplus W'$

Es folgt also $(*) \Rightarrow (1)$ und (2) gelten für $Z = \mathbb{P}(W)$

- Sei $v \in V_1 \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j v_j^{(1)}$

Sei $w \in W \oplus \mathbb{K} v$

$\Rightarrow w = \lambda v + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j (\alpha v_j^{(1)} + \beta v_j^{(2)}) + \underset{W''}{\overset{}{\underset{\cap}{w''}}}$

$w \overset{!}{\in} V_2 \Rightarrow \begin{cases} w'' = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} \lambda \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{s} \left[(\lambda \beta_j + \alpha \gamma_j) v_j^{(1)} + \beta \gamma_j v_j^{(2)} \right] \in V_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma_j = -\frac{\lambda}{\alpha} \beta_j \quad (\alpha \neq 0)$

$\Rightarrow w = \lambda \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i - \lambda \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j=1}^{s} \beta_j v_j^{(2)} \overset{!}{=} \lambda F(v)$

$\Rightarrow \beta/\alpha = -1$

Also kann $w = \lambda F(v)$ nur für $\beta = -\alpha$ gelten.

Also $W = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(v_1^{(1)} - v_1^{(2)}, \ldots, v_s^{(1)} - v_s^{(2)}) \oplus W''$

und es gilt

$$W \oplus \mathbb{K}v \cap V_2 = \mathbb{K} F(v)$$

Also gilt $(**)$ $\Rightarrow (3)$

$\square$

b) Sei $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, $f \neq id$

$f|_H = id$ für $H \subset \mathbb{P}(V)$ eine Hyperebene

$z_1 p, f(p)$ kollinear $\forall p \in \mathbb{P}(V)$

Z.z $\exists! \, z \in \mathbb{P}(V)$ mit $z, p, f(p)$ kollinear $\forall p \in \mathbb{P}(V)$

Beweis: $f = \mathbb{P}(F)$, $H = \mathbb{P}(W)$, $F: V \to V$ linear & bijektiv

($F \neq \lambda id$ denn sonst wär $f = id$)

$f|_H = id \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $F(v) = \lambda v \;\forall v \in W$

$W = \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_{n-1})$ $\quad (\mathcal{A} = (w_1, \ldots, w_n))$

$V = W \oplus \mathbb{K} v_n$ mit

- $F(w_i) = \lambda w_i$
- $F(w_n) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-1} w_{n-1} + \mu w_n$

$\mu \neq 0$ da F invertierbar ist.

Nach dem Satz über die Jordansche Normalform, können wir die Basis $\mathcal{A}$ so wählen, dass $M_{\mathcal{A}}(F)$ eine der folgenden zwei Gestalten annimmt.

1) $M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\mu \end{pmatrix}$ $\quad$ 2) $M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \; 1 \\ & & \; \lambda \end{pmatrix}$

$\mu \neq \lambda$

Fall 1 Sei $v \in V$ beliebig

$v = u + s w_n \quad u \in W,\ s \in \mathbb{K}$

$F(v) = \lambda u + s\mu w_n = \lambda v + s(\mu - \lambda) w_n$

$\Rightarrow$ $w_n, v, F(v)$ sind in einer 2d Ebene $\forall v \in V$

$\Rightarrow Z := \mathbb{K} w_n \in \mathbb{P}(V)$ ist das einzige Punkt mit des Eigenschaft, dass $z, p, f(p)$ kollinear sind $\forall p \in \mathbb{P}(V)$

Fall 2 $\quad v = u + \alpha w_{n-1} + s w_n \quad u \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(w_1, \dots, w_{n-2})$

$$F(v) = \lambda u + \lambda\alpha w_{n-1} + s(\lambda w_n + w_{n-1})$$
$$= \lambda u + (\lambda\alpha + s) w_{n-1} + s\lambda w_n$$
$$= \lambda v + s w_{n-1}$$

$w_{n-1}, v, F(v)$ sind in einer 2d Ebene $\forall v \in V$

$\Rightarrow z = \mathbb{K} w_{n-1}$

$\square$

c) Wir müssen annehmen, dass $G_1 \neq G_2$, denn sonst stimmt die ~~Aussage~~ Aussage nicht.

$G_i = \mathbb{P}(W_i) \quad i = 1, 2 \quad , \dim W_i = 2$

$W_i \subset \mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume

$W_1 \cap W_2 = \mathbb{R} w$ ($W_1 = W_2$ ist nicht zugelassen, da $G_1 \neq G_2$)

da zwei Ebenen durch 0 sich mindestens in einer Geraden schneiden.

Wir schreiben: $W_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, w)$
$W_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_2, w)$ (v_1, v_2 sind lin unabhängig)

$f = \mathbb{P}(F)$, $F: W_1 \to W_2$ ist linear und bijektiv

$F(v_1) = a v_2 + b w$
$F(w_2) = c v_2 + d w$

Definiere: $U := \operatorname{span}(v_1, F(w))$
$\dim U = 2$ da $F(w) \in W_2$ und $v_1 \in W_1 \setminus W_1 \cap W_2$

Definiere $F_1 : W_1 \to U$, $F_2 : U \to W_2$ durch

$F_1(v_1) = v_1$ $\quad F_1(w) = F(w)$
$F_2(v_1) = F(v_1)$ $\quad F_2(F(w)) = F(w)$

$G := \mathbb{P}(U)$, $g := \mathbb{P}(F_1)$, $g' := \mathbb{P}(F_2)$

$G \cap G_1 = \mathbb{R} v_1$, $g|_{G \cap G_1} = \mathrm{id}$
$\Rightarrow$ Nach a) ist g eine Zentralprojektion

$G \cap G_2 = \mathbb{R} F(w)$, $g'|_{G \cap G_2} = \mathrm{id}$
$\Rightarrow$ Nach a) ist g' eine Zentralprojektion

· $g' \circ g = \mathbb{P}(F) = f$

□