Übungsblatt 11: Lösungsskizzen

Aufgabe 1

$$f : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(z_1, z_2) \longmapsto \frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \begin{pmatrix} z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ i(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2) \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \|f(z_1,z_2)\|^2 = \frac{1}{(|z_1|^2+|z_2|^2)^2} \Big((z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)^2 - (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{(|z_1|^2+|z_2|^2)^2} \Big(4|z_1|^2|z_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 \Big) = 1$$

Also $f(z_1,z_2) \in S^2 \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$

Def: $\tilde{f} : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow S^2$

$$(z_1 : z_2) \longmapsto f(z_1, z_2)$$

$\tilde{f}$ ist wohldefiniert, da $f(\lambda z_1, \lambda z_2) = f(z_1, z_2)$ für alle $\lambda \neq 0$.

Alle Punkte in $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ lassen sich entweder als $(z : 1)$ mit $z = re^{i\varphi}$ $(r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi))$ oder als $(1:0)$ schreiben.

$$\tilde{f}(1:0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(z:1) = \frac{1}{r^2+1} \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi \\ r^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Es ist bekannt (Polarkoordinaten), dass sich jeder Punkt in S^2 schreiben lässt als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \varphi \in [0, 2\pi) \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

(Aufpassen: für $\theta = 0, \pi$ ist dieses Koordinatensystem entartet, d.h. $\forall \varphi$ kriegt man nur einen Punkt)

$\theta = 0$ entspricht $\tilde{f}(1:0)$

$\theta \in (0, \pi]$ entspricht $\tilde{f}(r:1)$ mit

$$r = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

Also können wir $\tilde{f}$ invertieren und haben deshalb eine Bijektion.

Aufgabe 2

$x, y \in GL(n; \mathbb{K})$

$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ mit } x = \lambda y$

$\mathbb{P}GL(n; \mathbb{K}) := GL(n; \mathbb{K})/\sim$

$[A] \cdot [B] := [AB]$

a) • Die Verknüpfung ist wohldefiniert, denn es gilt für $A, A' \in [A]$ und $B, B' \in [B]$:
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$ mit $A' = \lambda A$, $B' = \mu B$

$\Rightarrow A'B' = \lambda\mu AB$

$\Rightarrow [A'B'] = [AB]$

• $[A] \cdot [E] = [AE] = [A]$ (E ist die Einheitsmatrix)

$\Rightarrow [E]$ ist das Einselement.

• $[A][A^{-1}] = [AA^{-1}] = [E]$
($\forall A \in GL(n; \mathbb{K})$ $\exists A^{-1}$ mit $AA^{-1} = E$)

• Assoziativität folgt aus der Tatsache, dass $GL(n; \mathbb{K})$ eine Gruppe ist.

b) Kleine Korrektur: $\mathbb{P}GL(n+1;\mathbb{K})$ wirkt auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

- $\forall\, v,w \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}$ $\exists\, A \in GL(n+1;\mathbb{K})$ mit $w = Av$

  Beweis: Sei $S \in GL(n+1;\mathbb{K})$ der Form $S = (v \; *)$. S existiert, da $v \neq 0$. Sei $T \in GL(n+1;\mathbb{K})$ der Form $T = (w \; *)$. Def: $A = TS^{-1}$

  $\Rightarrow Av = Te_1 = w$ □

  Seien $p,q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow p = \mathbb{K}v,\ q = \mathbb{K}w$

  $[A]\cdot p = \mathbb{K}(Av) = \mathbb{K}w = q$

  $\Rightarrow$ Die Wirkung ist transitiv.

- Sei $[A] \in \mathbb{P}GL(n+1;\mathbb{K})$ mit $[A]p = p$ $\forall\, p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$

  $\Rightarrow Av = \lambda v \quad \forall\, v \in \mathbb{K}^{n+1}$

  $\Rightarrow A = \lambda E \Rightarrow [A] = [E]$

  Die Wirkung ist treu.

Aufgabe 3

Sei $Q = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : x^t A x = 0\}$

$A \in M((n+1)\times(n+1);\mathbb{R})$, $A^t = A$

Sei $\mathcal{U} = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ proj. Unterraum mit $\mathcal{U} \subset Q$.

Nach [F3], Seite 186, $\exists$ Zahlen $-1 \leq k \leq m \leq n$

So, dass

Q äquivalent ist zu

$$Q' = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = 0\}$$

Es gilt : $\text{Rang}(A) = m+1$
$\text{Sign}(A) = k+1 - (m-k) = 2k+1-m$

Sei $v_1, \dots, v_\ell$ eine Basis von W $(U = \mathbb{P}(W))$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i\right)^t D \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i\right) = 0 \quad \forall \alpha_i$$

wobei $D = \begin{pmatrix} E_{k+1} & & \\ & -E_{m-k} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M((n+1)\times(n+1); \mathbb{R})$

$$\Rightarrow v_i^t D v_j = 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, \ell$$

Was ist das maximale Wert von ℓ ?

~~o.B.d.A~~ Fall 1 $2k+1 \geq m$ (d.h. $k \geq m-k-1$) (der andere Fall ist sehr ähnlich)

Def: $w_i = e_i - e_{k+1+i}$ $\quad i = 0, \dots, m-k-1$
$w_i' = e_{m+i}$ $\quad i = 1, \dots, n-m$

Es gilt : $w_i^t D w_j = w_i'^t D w_j' = w_i^t D w_j' = 0$

Sei $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$

- $v^t D w_i' = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ $\quad i = m+1, \dots, n$
- $v^t D w_i = 0 \Rightarrow \alpha_i + \alpha_{k+1+i} = 0$ $\quad i = 0, \dots, m-k-1$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=0}^{m-k-1} \alpha_i w_i + \sum_{j=m-k}^{m} \beta_j e_j$$

$$v^t D v = 0 \Rightarrow \sum_{j=m-k}^{m} \beta_j^2 = 0 \Rightarrow \beta_j = 0$$

$$\Rightarrow v \in \text{span}(w_i)_{i=0}^{m-k-1} \oplus \text{span}(w_i')_{i=1}^{n-m}$$

Der Untervektorraum W mit maximaler Dimension hat Dimension

$$\dim W = n-m+m-k = n-k$$

$$\Rightarrow \dim U = n-k-1 = n - \frac{1}{2}(m+1+2k+1-m)$$

$$= n - \frac{1}{2}\left(\text{Rang}(A) + \underbrace{\text{Sign}(A)}_{\text{ist positiv in diesem Fall}}\right)$$

Der Fall $2k+1 < m$ ist fast identisch und ist dem Leser überlassen

$\square$

Aufgabe 4

$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $f : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$

(wir setzen $\frac{A}{0} = \infty$ solange $A \neq 0$) gilt immer, da $ad-bc \neq 0$

a)

$$f(z_0) = 0 \Rightarrow az_0 + b = 0 \Rightarrow b = -az_0$$

$$f(z_1) = 1 \Rightarrow \frac{az_1+b}{cz_1+d} = 1$$

$$f(z_2) = \infty \Rightarrow cz_2 + d = 0 \Rightarrow d = -cz_2$$

$$\Rightarrow az_1 - az_0 = cz_1 - cz_2 \Rightarrow c = a\frac{z_1-z_0}{z_1-z_2}$$

wohldefiniert, da z_0, z_1, z_2 paarweise verschieden sind.

$$f(z) = \frac{az - az_0}{a\frac{z_1-z_0}{z_1-z_2}z - a\frac{z_1-z_0}{z_1-z_2}z_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow f(z) = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_0}\,\frac{z-z_0}{z-z_2}}$$

Die Möbius Transformation ist eindeutig!

(Reskalierungen von a, b, c, d um λ ergeben die gleiche Transformation)

b) Sei $g = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $g(0) = z_0'$
$g(1) = z_1'$
$g(\infty) = z_2'$

wobei z_0', z_1', z_2' alle verschieden sind

$\Rightarrow$ $b = dz_0'$, $a+b = z_1'(c+d)$, $a = cz_2'$

$$\Rightarrow g = \frac{z\, z_2' \frac{z_1'-z_0'}{z_1'-z_2'} - z_0'}{z \frac{z_1'-z_0'}{z_1'-z_2'} - 1}$$

Nach a) gilt dann

$$(g \circ f)(z) = \frac{\left(z_2' \frac{z_1'-z_0'}{z_1'-z_2'} \frac{z_1-z_2}{z_1-z_0} - z_0'\right) z + \left(z_0' z_2 - z_2' z_0 \frac{z_1'-z_0'}{z_1'-z_2'} \frac{z_1-z_2}{z_1-z_0}\right)}{\left(\frac{z_1'-z_0'}{z_1'-z_2'} \frac{z_1-z_2}{z_1-z_0} - 1\right) z + \left(z_2 - z_0 \frac{z_1'-z_0'}{z_1'-z_2'} \frac{z_1-z_2}{z_1-z_0}\right)}$$

und $(g \circ f)(z_i) = z_i'$

(Die Möbius Transformation $g \circ f$ ist eindeutig)

c) Die Gleichung eines Kreises in $\mathbb{C}$ ist in der Form

$|z-\omega|^2 = R^2$ mit $\omega \in \mathbb{C}$ (Zentrum) und $R > 0$ (Radius)

$\Rightarrow |z|^2 - \overline{\omega} z + \omega \overline{z} + |\omega|^2 = R^2$

$\Rightarrow |z|^2 - \overline{\omega} z - \omega \overline{z} + |\omega|^2 - R^2 = 0$ (*)

Sei $K = \{ z \in \mathbb{C} : A|z|^2 + B z + \overline{B} \overline{z} + C = 0 \}$

mit $AC - |B|^2 < 0$

Fall 1: $A \neq 0$ $\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich mit (*) sagt, dass K ein Kreis ist mit

$w = -\frac{\overline{B}}{A}$ und $R = \sqrt{\frac{|B|^2 - AC}{A}}$

<u>Fall 2</u> $A = 0$

$B = a + bi$, $z = u + iv$

$$Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = \underbrace{2au - 2bv + C = 0}_{\text{Gleichung einer Gerade in } \mathbb{R}^2}$$

Die Umkehrung der Aussage ist ähnlich.

d) ~~Sei $K \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ein Kreis~~
~~$K = \{ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| ($~~

Sei $\rho : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ definiert durch

$$\infty \longmapsto (1:0)$$
$$z \longmapsto (z:1), \quad z \in \mathbb{C}$$

ρ ist eine Bijektion

Sei $\tilde{f} : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ gegeben durch

$\tilde{f} = \mathbb{P}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, also

$\tilde{f}(z_0 : z_1) = (az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1)$

Jede Möbiustransformation f kann geschrieben werden als $f = \rho^{-1} \circ \tilde{f} \circ \rho$

Nach c) können wir Kreise in $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

beschreiben als

$$K = \left\{ (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \;:\; \begin{pmatrix} \overline{z_0} \\ \overline{z_1} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

mit $\det \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix} < 0$

$(z_0 : z_1) = \tilde{f}(w_0 : w_1)$

$$\begin{pmatrix} \overline{z_0} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w_0} & \overline{w_1} \end{pmatrix} M^+ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

wobei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$

$$\operatorname{Det}\left(M^+ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix} M\right) = \underbrace{|\operatorname{Det} M|^2}_{>0} \underbrace{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & C \end{pmatrix}}_{<0} < 0$$

$\Rightarrow$ Möbiustransformationen bilden Kreise auf Kreise.