Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 2, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 26.04. um 13.15 Uhr

1 [Diagonalisierbarkeit] Bestimmen Sie die Werte von $a, b \in \mathbb{C}$ für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar ist. Für die Fälle in denen A nicht diagonalisierbar ist bestimmen Sie S so, dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. *(5 Punkte)*

2 [Simultane Diagonalisierung] Bestimmen Sie eine Matrix $S \in M(4 \times 4; \mathbb{R})$ so, dass SAS^{-1} und SBS^{-1} diagonal sind, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

3 [Allgemeine Begriffe] Wir führen die folgenden Konzepte ein:

- Eine Matrix $S \in M(n \times n; \mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, falls $S^t = S$.
- Eine Matrix $O \in M(n \times n; \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls $O^t = O^{-1}$.
- Eine Matrix $H \in M(n \times n; \mathbb{C})$ heißt *hermitesch*, falls $H = H^\dagger$. Hier ist $H^\dagger = \bar{H}^t$, wobei $\bar{H}$ die zu H komplex konjugierte Matrix ist.
- Eine Matrix $U \in M(n \times n; \mathbb{C})$ heißt *unitär*, falls $U^\dagger = U^{-1}$.
- Eine Matrix $N \in M(n \times n; \mathbb{C})$ heißt *normal*, falls N mit $N^\dagger$ kommutiert.

Seien $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ und $B \in M(n \times n; \mathbb{C})$ gegeben. Beweisen Sie

a) $\exists O$ orthogonal mit OAO^{-1} diagonal $\implies A$ ist symmetrisch.

b) $\exists U$ unitär mit UBU^{-1} diagonal $\implies B$ ist normal.

c) $\exists U$ unitär mit UBU^{-1} diagonal und die Eigenwerte von B sind alle reel $\implies B$ ist hermitesch.

(5 Punkte)

4 [Trigonalisierung] Benutzen Sie das Trigonalisierungsverfahren zur Trigonalisierung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 & -9 \\ -1 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)