Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 3, Abgabe spätestens bis in der VL am Dienstag 08.05. um 13.15 Uhr

1 [Satz von Cayley-Hamilton] Berechnen Sie mit dem Satz von Cayley-Hamilton die Inverse $A^{-1} \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

2 [Skalarprodukt, Norm] Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$. Seien $e_1, \ldots, e_l \in V$ Einheitsvektoren in V, die paarweise orthogonal sind. Zeigen Sie:

a)
$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0;$$

b)
$$||x|| = ||y|| \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x + y, x - y \rangle = 0;$$

c)
$$\sum_{k=1}^{l} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Gelten diese Aussagen auch für unitäre Vektorräume? *(4 Punkte)*

3 [Vektorprodukt] Zeigen Sie, dass der Abstand d eines Punktes p von der Geraden $g : x = a + \lambda b$ gegeben ist durch

$$d = \frac{||b \times (p - a)||}{||b||}$$

und berechnen Sie damit den Abstand von $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu $g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

4 [Bilinearität] Sei im $\mathbb{R}^2$ die Abbildung

$$\beta(x, y) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$$

gegeben.

a) Zeigen Sie: $\beta(x, y)$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: $V = (\mathbb{R}^2, \beta)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

c) Berechnen Sie $||(3, -5)||$ in V.

(7 Punkte)