Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE I* WS 2011/12

ÜBUNGSBLATT 4, Abgabe spätestens bis in der VL am Di. 15.05. um 13.15 Uhr

1 [Orthonormalbasis] Sei die Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^4$ definiert durch die Gleichung

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1\right\}.$$

Bestimmen Sie Vektoren b, v_1, v_2, v_3, sodass $H = b + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$ und v_1, v_2, v_3 orthonormal sind bezüglich des kanonischen Skalarproduktes in $\mathbb{R}^4$. *(3 Punkte)*

2 [Die Spezielle Unitäre Gruppe SU(2)]
Wir definieren $\mathrm{SU}(2) := \left\{A \in M(2 \times 2; \mathbb{C}) : A^{-1} = A^\dagger \wedge \det A = 1\right\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \wedge |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

und bestimmen Sie eine bijektive Abbildung $f : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$, wobei $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : ||x||^2 = 1\}$.
(4 Punkte)

3 [Sesquilinearformen]

a) Sei $s : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform über $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass s sich auf eindeutige Art und Weise zerlegen lässt als Summe einer hermiteschen und einer antihermiteschen Sesquilinearform.

Eine Sesquilinearform heißt hermitesch, beziehungsweise antihermitesch, falls $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$, beziehungsweise $s(x, y) = -\overline{s(y, x)}$.

b) Sei $(\cdot, \cdot) : M(n \times n; \mathbb{C}) \times M(n \times n; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert durch $(X, Y) = \mathrm{Sp}(X^\dagger Y)$. Zeigen Sie, dass $(\cdot, \cdot)$ eine Norm auf $M(n \times n; \mathbb{C})$ liefert und bestimmen Sie das orthogonale Komplement von

- α) der Menge aller spurlosen Matrizen,
- β) der Menge aller hermiteschen Matrizen,
- γ) der Menge aller oberen Dreiecksmatrizen.

c) Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ und $B := A^\dagger A$. Zeigen Sie:

- α) B ist hermitesch.
- β) Alle Eigenwerte von B sind nicht negativ.
- γ) B ist positiv definit $\iff$ A ist invertierbar.

(7 Punkte)

4 [Normale Operatoren]
Seien V ein endlichdimensionaler unitärer Raum mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ und $F : V \to V$ linear gegeben. Die adjungierte Abbildung $F^* : V \to V$ ist definiert durch die Gleichung

$$\langle v, F(w)\rangle = \langle F^*(v), w\rangle \qquad \forall v, w \in V.$$

Eine Abbildung F wird *normal* genannt, falls $F \circ F^* = F^* \circ F$ und *selbstadjungiert*, falls $F = F^*$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Im}(F^*)^\perp$.

Bitte wenden

b) Sei F normal. Dann gilt $||F(x)|| = ||F^*(x)|| \ \forall x \in V$.

c) Sei F normal. Es gilt: $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Ker}(F^*)$.

d) Sei F normal. Falls v ein Eigenvektor von F zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von F^* zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

e) Sei F normal und seien v_1 und v_2 zwei Eigenvektoren von F zu den unterschiedlichen Eigenwerten λ_1, beziehungsweise λ_2. Dann sind v_1 und v_2 orthogonal zu einander.

f) Sei F normal und sei λ ein Eigenwert von F. Wir definieren $U := \mathrm{Eig}(F, \lambda)^{\perp}$. Dann ist U invariant unter F, also $F(x) \in U$, $\forall x \in U$.

(6 Punkte)