Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE I* WS 2011/12

ÜBUNGSBLATT 5, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 24.05. um 13.15 Uhr

1 [Orthogonale Operatoren] Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $\rho \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Zeigen Sie: $(\mathrm{Eig}(\rho;1) \oplus \mathrm{Eig}(\rho;-1))^\perp$ hat eine gerade Dimension und ist eine orthogonale Summe zweidimensionaler ρ-invarianter Unterräume. *(3 Punkte)*

2 [Der adjungierte Operator, Selbstadjungiertheit]

a) Sei V ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) $AA^\star$ und $A^\star A$ sind selbstadjungiert für jedes $A \in \mathrm{End}(V)$.

(b) Wenn A invertierbar ist, dann gilt dies auch für $A^\star$, und dann gilt $(A^\star)^{-1} = (A^{-1})^\star$.

b) Auf $\ell^2(\mathbb{C}) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \,:\, x_i \in \mathbb{C}\,\forall i \text{ and } \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty\}$ definieren wir die Form

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : ((x_i),(y_i)) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{x_i} y_i,$$

sowie die Rechtsverschiebung

$$S : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), \qquad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Bestimmen Sie $S^\star$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$) sowie die Eigenwerte von S und $S^\star$.

(4 Punkte)

3 [Bilinearformen und Basistransformationen]

a) Sei $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, definiert in der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ durch

$$s(x,y) = x^t\,(M_{\mathcal{E}}(A))\,y = x^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$, sodass $M_{\mathcal{B}}(A)$ diagonal ist. Ist die Bilinearform s positiv definit?

b) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -4 & -2 & -10 \\ 2 & 7 & -10 & 22 \end{pmatrix}$$

mit der symmetrischen Umformungsmethode.

(6 Punkte)

4 [Isometrien, normale Operatoren]

a) Zeigen Sie, dass jeder normale Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums diagonalisierbar ist.

b) Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ normal, und $P, Q \in \mathbb{C}[t]$ mit $P(\phi) = 0$ und $|Q(c)| = 1$ für jede Nullstelle $c \in \mathbb{C}$ von P.

Zeigen Sie, dass $Q(\phi)$ eine Isometrie von V ist.

(7 Punkte)