Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie I* WS 2011/12

Übungsblatt 6, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 31.05. um 13.15 Uhr

1 [Minimalpolynome, Jordansche Normalform] Sei $I \subset \mathbb{K}[t]$ mit $I \neq \{0\}$ ein Ideal (vgl. Aufgabe 4). Sei $M_I \in \mathbb{K}[t]$. Dann heißt M_I *Minimalpolynom* von I, wenn gilt:

- M_I ist normiert, d.h. $M_I = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, wobei $d = \deg M_I$ ist;
- für jedes $P \in I$ gibt es ein $Q \in \mathbb{K}[t]$ mit $P = Q \cdot M_I$.

Sei nun V ein zehndimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{aligned} P_F(t) &= (t-2)^5(t+5)^2(t-1)^3, \\ M_F(t) &= (t-2)^2(t+5)^2(t-1)^2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von F. *(3 Punkte)*

2 [Jordansche Normalform] Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Jordansche Normalform für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

3 [Jordansche Normalform] Seien $A \in M(5 \times 5; \mathbb{R})$ und $B \in M(4 \times 4; \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordanschen Normalformen von A und B sowie die zugehörigen Jordan-Basen des $\mathbb{R}^5$ bzw. des $\mathbb{R}^4$. *(7 Punkte)*

4 [Ideale] Eine Teilmenge I eines kommutativen Rings R heißt *Ideal*, wenn folgendes gilt:

$$(P, Q \in I \;\Rightarrow\; P - Q \in I) \quad \wedge \quad (Q \in R, P \in I \;\Rightarrow\; Q \cdot P \in I).$$

Sei nun R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie:

a) die Menge $\{r \in R \mid r^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Ideal von R;

b) ein Ideal, das ein invertierbares Element enthält, enthält den gesamten Ring;

c) R ist ein Körper, wenn R genau zwei Ideale (das Nullideal und den gesamten Ring) enthält.

(6 Punkte)