Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE II* SS 2012

ÜBUNGSBLATT 7, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 7.06. um 13.15 Uhr

1 [Teilverhältnis] Seien X ein affiner Raum über $\mathbb{K}$, Y eine Gerade und $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p} \in Y$ mit $\mathrm{p}_0 \neq \mathrm{p}_1$. Dann $\exists! \lambda \in \mathbb{K}$, so dass $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}_1}$ und wir definieren das *Teilverhältnis* $\mathrm{TV}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}) := \lambda$. Nehmen Sie an, dass die Punkte explizit durch Koordinaten gegeben sind, also

$$\mathrm{p}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \quad \mathrm{p}_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \quad \mathrm{p} = (x_1, \dots, x_n).$$

Finden und beweisen Sie eine Formel für $\mathrm{TV}(\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \mathrm{p})$. *(3 Punkte)*

2 [Verbindungsräume] Seien X ein affiner Raum über $\mathbb{K}$, I eine Menge und $\{Y_i\}_{i\in I}$ affine Unterräume von X. Wir definieren den Verbindungsraum $\bigvee_{i\in I} Y_i$ als den Durchschnitt

$$\bigvee_{i\in I} Y_i := \bigcap_{\substack{\text{affine } Y \subset X \\ \bigcup_{i\in I} Y_i \subset Y}} Y.$$

Seien $\{\mathrm{p}_i\}_{i=1}^k$ Punkte in X, dann definieren wir den Verbindungsraum

$$\mathrm{p}_1 \vee \dots \vee \mathrm{p}_k := \{\mathrm{p}_1\} \vee \dots \vee \{\mathrm{p}_k\}.$$

a) Seien $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in X$ zwei verschiedene Punkte. Zeigen sie, dass

$$\mathrm{p} \vee \mathrm{q} = \left\{ (\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{pq}})\,(p) : \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

b) Seien

$$Y_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x \notin \mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}_2,\ \forall \mathrm{p}_1 \in Y_1 \text{ und } \forall \mathrm{p}_2 \in Y_2 \right\}$.

(4 Punkte)

3 [Affine Abbildungen] Seien X, X' und X'' affine Räume über $\mathbb{K}$.

a) Sei $f : X \to X'$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie, dass f injektiv, beziehungsweise surjektiv ist, wenn $F_f : V_X \to V_{X'}$ injektiv, beziehungsweise surjektiv ist.

b) Sei $f : X \to X'$ eine Affinität, also eine bijektive affine Abbildung. Zeigen Sie, dass f^{-1} eine Affinität ist und dass $F_{f^{-1}} = F_f^{-1}$.

c) Seien $f : X \to X', g : X' \to X''$ affine Abbildungen. Zeigen Sie, dass $g \circ f : X \to X''$ eine affine Abbildung ist mit

$$F_{g\circ f} = F_g \circ F_f.$$

d) Sei $f : X \to X'$ affin und sei $Y \subset X$ ein affiner Unterraum. Zeigen Sie, dass $f_{|Y} : Y \to X'$ affin ist mit $F_{f_{|Y}} = (F_f)_{|V_Y}$.

(6 Punkte)

Bitte wenden.

4 [Operationen, Bahnen, Stabilisatoren] Sei X eine Menge und G eine Gruppe.

- Sei die symmetrische Gruppe von X definiert als $\mathbb{S}(X) := \{f : X \to X : f \text{ bijektiv}\}$, also die Gruppe der Bijektionen auf X.
- Ein Gruppenhomomorphismus
$$\tau : G \to \mathbb{S}(X), \quad g \mapsto \tau_g$$
wird *Operation von G auf X* genannt.
- Für einen Punkt $x \in X$ nennt man die Teilmenge
$$G(x) := \{\tau_g(x) : g \in G\} \subset X$$
die *Bahn* (manchmal auch *Orbit*) von x unter G.
- Wir definieren noch für $x \in X$ den *Stabilisator* von x durch
$$Stab_G(x) := \{g \in G : \tau_g(x) = x\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $Stab_G(x)$ für beliebiges $x \in X$ eine Untergruppe von G ist.

b) Zeigen Sie, dass für zwei Punkte $x, y \in X$ entweder $G(x) = G(y)$ oder $G(x) \cap G(y) = \emptyset$ gilt.

c) Wir betrachten $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ mit der Gruppe $SO(3)$, der Gruppe der Rotationen von $\mathbb{R}^3$. $SO(3)$ wirkt auf S^2 durch $x \mapsto A \cdot x$ für $A \in SO(3)$. Bestimmen Sie für beliebiges $x \in S^2$ die Bahn $SO(3)(x)$ und den Stabilisator $Stab_{SO(3)}(x)$.

d) Wir betrachten die Menge S_3, die Permutationsgruppe von drei Elementen, mit der Gruppe S_3. Wir definieren die Operation $\tau : S_3 \to \mathbb{S}(S_3)$, $g \mapsto \tau_g$, wobei
$$\tau_g(h) = ghg^{-1}.$$
Bestimmen sie für alle $x \in S_3$ die Bahn $S_3(x)$ und den Stabilisator $Stab_{S_3}(x)$. Weiter bezeichne M die Menge aller nicht-identischen Bahnen. Zeigen Sie, dass sich S_3 als disjunkte Vereinigung aller Elemente von M schreiben lässt.
Bemerkung: Diese Operation wird *Konjugation* und die Elemente in M werden *Konjugationsklassen* genannt.

(7 Punkte)