Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* SS 2012

Übungsblatt 9, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 21.06. um 13.15 Uhr

1 Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{(x_1; x_2; x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 - 8x_2x_3 = 0\}$$

Bestimmen Sie eine affine Normalform Q' von Q und eine Affinität α mit $\alpha(Q) = Q'$.

2 [Projektive Geometrie] Gegeben seien die beiden Geraden $G_1 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \; : \; x_1 - x_2 = 0\}$ und $G_2 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \; : \; x_2 = 0\}$ und eine Abbildung $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ mit Zentrum $z := (1 : 0 : 1)$ und mit $f(G_1) = G_2$. Zeigen Sie, dass $f|G_1$ projektiv ist.

(3 Punkte)

3

a) Wir betrachten Quadriken im $\mathbb{R}^3$.

Finden Sie eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$, die die folgenden Geradenscharen I_a und II_b, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ enthält:

$$I_a := \{(x, y, z) \; : \; x + y = a, \quad a(x - y) = z\},$$
$$II_b := \{(x, y, z) \; : \; x - y = b, \quad b(x + y) = z\}.$$

b) Wir betrachten Quadriken im K^2 für den endlichen Körper $\mathbb{Z}_3$.

Bestimmen Sie alle Normalformen von Quadriken in $(\mathbb{Z}_3)^2$. (Erklären Sie dabei insbesondere all jene Schritte, die für $\mathbb{Z}_3$ anders sind als für $\mathbb{R}$.) Skizzieren Sie für jede Normalform eine Quadrik.

c) Wir betrachten Quadriken über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}_2$.

Erklären Sie ausführlich (d.h. nennen Sie alle Gründe), warum hierbei eine "Befreiung von den gemischten Termen" (wie im Fischer beschrieben) nicht möglich ist.

(7 Punkte)

4 Seien $Q_A, Q_B \subset \mathbb{R}^n$ Quadriken, die durch A, B dargestellt werden.

a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ durch $C := \lambda A + \mu B$ eine Quadrik beschrieben wird, für die $Q_A \cap Q_B \subset Q_C$ gilt.

Wir betrachten Quadriken im $\mathbb{R}^3$.

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Normalformen, dass der Schnitt zweier Quadriken Q_1, Q_2 im $\mathbb{R}^3$ genau dann wieder eine Quadrik ist, wenn $Q_i \subset Q_j$ für ein $i \neq j \in \{1, 2\}$ oder $Q_1 \cap Q_2$ ein affiner Unterraum ist.

Wir betrachten nun Quadriken im $\mathbb{R}^2$.

c) Beweisen Sie für Quadriken im $\mathbb{R}^2$ eine entsprechende Aussage wie im Aufgabenteil b) unter Verwendung von Aufgabenteil a), indem Sie $\det(A + \mu B)$ für ein geeignetes μ betrachten.

d) Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier Quadriken im $\mathbb{R}^2$ entweder wieder eine Quadrik ist oder aus höchstens 4 Punkten besteht.

(7 Punkte)