Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* SS 2012

Übungsblatt 10, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 28.06. um 13.15 Uhr

1 [Quadriken] Seien $P_1, \ldots, P_5 \in \mathbb{R}^2$ so, dass keine 3 Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und $P_i' := (1, P_i) \in \mathbb{R}^3$. Wir bezeichnen mit $v \times w$ das Vektorprodukt von $v, w \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass für $A := (P_1' \times P_2')(P_3' \times P_4')^T$ gilt, $P^T AP = 0$ für alle $P = aP_1' + bP_2',\ a, b \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass $B := (P_1' \times P_2')(P_3' \times P_4')^T + (P_3' \times P_4')(P_1' \times P_2')^T$ eine Quadrik beschreibt, und beschreiben Sie diese Quadrik geometrisch.

c) Nutzen Sie die Methode aus Blatt 9, Aufgabe 4a) um eine Quadrik zu finden, die alle 5 Punkte enthält.
Hinweis: Betrachten Sie $C = (P_1' \times P_3')(P_2' \times P_4')^T + (P_2' \times P_4')(P_1' \times P_3')^T$.

(4 Punkte)

2 [Projektiver Abschluss] Sei die Gerade $G \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $G = (1, 0, 2) \vee (3, 1, 0)$. Bestimmen Sie ein Gleichungssystem für den projektiven Unterraum $\tilde{G} \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, der zum projektiven Abschluss $\bar{G}$ isomorph ist.
Hinweis: Vergleichen Sie mit [F3], Seite 149.

(3 Punkte)

3 [Projektive Geraden, Doppelverhältnis]

a) Sei $Z \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ eine projektive Gerade. Zeigen Sie, dass es $0 \neq (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$Z = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

Zeigen Sie noch, dass $p(Z) := (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ durch Z *eindeutig* bestimmt ist.

b) Gegeben seien drei projektive Geraden Z_1, Z_2 und Z_3 in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, die durch einen projektiven Punkt $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ gehen. Zeigen Sie, dass die drei projektiven Punkte $p(Z_i)$ dann auf einer projektiven Gerade liegen.

c) Seien $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ mit p_0, p_1, p_2 alle verschieden und seien deren homogene Koordinaten $p_i = (\lambda_i : \mu_i)$. Wir definieren das *Doppelverhältnis* durch den folgenden Quotienten von Determinanten:

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) := \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Zeigen Sie, dass für $\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) \notin \{0, \infty\}$ gilt

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \mathrm{DV}(p_0, p_1, p_3, p_2)^{-1} = \mathrm{DV}(p_1, p_0, p_2, p_3)^{-1}$$

und

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) + \mathrm{DV}(p_0, p_2, p_1, p_3) = 1.$$

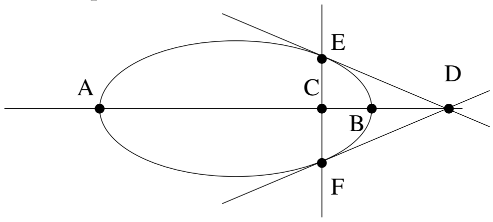
d) Seien a, b, c, d, e fünf verschiedene Punkte in $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{DV}(a, b, c, d)\mathrm{DV}(a, b, d, e)\mathrm{DV}(a, b, e, c) = 1.$$

e) Für vier kollineare Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 in $\mathbb{R}^n$ mit z_1, z_2, z_3 alle verschieden kann das Doppelverhältnis auch folgendermaßen definiert werden. Die Punkte liegen auf der Gerade $G = \{p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}, ||v|| = 1\}$ und werden eindeutig dargestellt durch vier reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ mit $z_i = p + \lambda_i v$. Dann schreiben wir

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Im folgenden Bild stehen die Geraden DE und DF tangential zur Ellipse und die Punkte A, B, C und D liegen auf der grossen Hauptachse.



Zeigen Sie, dass $\mathrm{DV}(A, B, C, D) = -1$.

(6 Punkte)

4 [Zentralprojektionen] Sei V ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Seien U_1 und U_2 gleichdimensionale projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$. Eine Abbildung $f : U_1 \to U_2$ heißt *Zentralprojektion*, wenn es einen projektiven Unterraum $Z \subset \mathbb{P}(V)$ gibt mit

- $Z \vee U_1 = Z \vee U_2 = \mathbb{P}(V)$,
- $Z \cap U_1 = Z \cap U_2 = \emptyset$,
- für alle $p \in U_1$ gilt $f(p) = (Z \vee p) \cap U_2$.

Der projektive Unterraum Z wird das *Zentrum* von f genannt.

a) Gegeben seien gleichdimensionale projektive Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{P}(V)$. Zeigen Sie, dass jede Projektivität $f : U_1 \to U_2$ mit der Eigenschaft $f_{|U_1 \cap U_2} = \mathrm{id}$ eine Zentralprojektion ist.

b) Sei $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, $f \neq \mathrm{id}$, eine Projektivität mit $f_{|H} = \mathrm{id}$ für eine Hyperebene $H \subset \mathbb{P}(V)$. Zeigen Sie:

$$\exists! z \in \mathbb{P}(V) \text{ mit } z, p, f(p) \text{ kollinear } \forall p \in \mathbb{P}(V).$$

Bemerkung: Solch eine Abbildung heißt *Perspektivität*; H heißt ihre *Basis* und z ihr *Zentrum*.

c) Seien G_1 und G_2 zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ und $f : G_1 \to G_2$ eine Projektivität. Zeigen Sie, dass es eine Gerade $G \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ und Zentralprojektionen $g : G_1 \to G$, $g' : G \to G_2$ gibt, sodass $f = g' \circ g$.

Hinweis: Vergleichen Sie mit [F3], Seiten 150-151.

(7 Punkte)