Übungsblatt 9 : Lösungsskizzen

Aufgabe 1

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x^t A x = 0 \}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ und } T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} =: S$$

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$x \longmapsto Sx$$

$$\alpha(Q) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \alpha^{-1}(x)^t A \alpha^{-1}(x) = 0 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : x^t T^t A T x = 0 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \} \quad \text{(Kegel)}$$

2) $G_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_1 - x_2 = 0\}$

$G_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_2 = 0\}$

$f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ mit Zentrum $z := (1:0:1)$,

$f(G_1) = G_2$ }.

z.z.: $f|_{G_1}$ ist projektiv.

Zentrum $= \mathbb{P}(\ker F)$, wobei F die zu f gehörende Abb
$\overset{\shortparallel}{z(f)}$ zwischen den Vektorräumen $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3$ ist, also

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit}$$

$$f(\mathbb{R}\cdot v) = \mathbb{R}\cdot F(v) \quad \forall \underset{\neq 0}{v} \in V.$$

1) Bestimme (Vorstellen) F bzw $z(f)$:

$z(f) = z = (1:0:1)$, also ist F eine Abb mit 1-dimensionalem Kern, d.h. einer ~~Punkt~~ Gerade als Kern.

2) $f|_{G_1}$ heißt projektiv, wenn es ein injektives $\tilde{F} : V_1 \to W$ gibt,

mit $f|_{G_1}(\mathbb{R}\cdot v) = \mathbb{R}\cdot \tilde{F}(v) \quad \forall \underset{\neq 0}{v} \in V$

Die erste Frage ist, was sind V und W (?).

$G_1 = \mathbb{P}(x_0, x_1, x_1) \Rightarrow V_1 := \{(x_0, x_1, x_1) \in \mathbb{R}^3\}$

$G_2 = \mathbb{P}(x_0, x_1, 0) \Rightarrow V_2 := \{(x_0, x_1, 0) \in \mathbb{R}^3\}$

Dann ist $\tilde{F} : V_1 \to V_2$ mit

$$f|_{G_1} = \mathbb{P}(\tilde{F}).$$

3) Bleibt zu zeigen, dass $\tilde{F}$ injektiv ist:

$\tilde{F}$ injektiv $\iff \ker \tilde{F} = \{0\} \iff \dim \operatorname{Im} \tilde{F} = \dim V_1$ (da $\tilde{F}$ linear)

Haben: $f(G_1) = G_2 \Rightarrow \tilde{F}(V_1) = V_2$

und $\dim V_1 = \dim V_2 = 2 \Rightarrow \tilde{F}$ injektiv $\Rightarrow f|_{G_1}$ projektiv.

Musterlösung Blatt 9

Aufgabe 3a)

Gesucht ist hier offensichtlich nicht die Quadrik Q_A mit $A = 0$, ~~und~~ da dann $Q_A = \mathbb{R}^3$. (Das wäre zu trivial und gäbe keine Punkte!)

Also ist die Quadrik $Q: x^2 - y^2 - z = 0$ gesucht.

Bleibt nur noch zu zeigen, dass alle diese Geraden in Q liegen.

(einfache Rechnung)

3b)

Hierbei muss man ~~und~~ durch Kapitel 1.4.1 gehen, und jeden Schritt prüfen.

1. Punkt

$$A' := (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad a_{ij} := a_{ji} := \frac{1}{2}\alpha_{ij}.$$

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_3$, also was ist gemeint?

Gemeint / Gewollt ist, dass $a_{ij} + a_{ji} = \alpha_{ij}$.

Das ist in $\mathbb{Z}_3$ wie folgt möglich:

$$\alpha_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = 0 \qquad (0+0=0)$$

$$\alpha_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = 2 \qquad (2+2=1)$$

$$\alpha_{ij} = 2 \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = 1 \qquad (1+1=2).$$

Also ist A' wohldefiniert, und man macht weiter wie im Fischer.

2. Punkt: ~~Kapitel 1.4.3:~~

~~A' ist symmetrisch, $\Rightarrow A'$ symm.~~

Kapitel 1.4.3:

A' ist symm $\Rightarrow A$ symm, $\Rightarrow$ diagonalisierbar.

aber: $-1 \notin \mathbb{Z}_3$, also ist die Matrix $T_1^t A T_1 = \begin{pmatrix} E_k & & 0 \\ & 2E_{m-k} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

3. Punkt geht weiter wie im Fischer!

Musterlösung Blatt 9

weiter mit 3 b)

3. Punkt:

Fallunterscheidung auf Seite 59, Fall (b):

Hier steht: Im Fall (b) können wir $d_{00} < 0$ annehmen.

Das geht offensichtlich in $\mathbb{Z}_3$ nicht!

~~Lösung: Falls $d_{00} = 1$ gibt es kein Problem,~~

~~denn dann ist $d_{00} = 1 \cdot 1$~~

Ziel ist ja, die Wurzel $\sqrt{-d_{00}}$ bestimmen zu können.

Wir haben bereits gesehen, dass $2 \cdot 2 = 1$ gilt (in $\mathbb{Z}_3$).

Nun überlegen wir uns:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$
$$2 \cdot 2 = 1.$$

Man kann also aus 2 keine Wurzel ziehen!

Was macht man also, falls $d_{00} = 2$ ist?

Antwort: Man "multipliziert mit -1" wie es in Fischer heißt, das bedeutet:

$$2 \mapsto 1 \qquad \text{also } x \mapsto 2 \cdot x \in \mathbb{Z}_3$$
$$1 \mapsto 2$$
$$0 \mapsto 0.$$

Wenn man das gemacht hat, ist es also möglich, eine "Wurzel" aus d_{00} zu ziehen, denn wir definieren: $\sqrt{1} := 1$.

Der Rest geht wie im Fischer beschrieben auch für $\mathbb{Z}_3$.

3b) Skizzen von Quadriken im $(\mathbb{Z}_3)^2$.

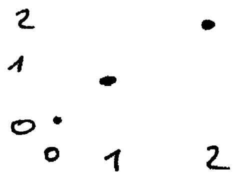
Es gibt 8 ~~Typen~~ Normalformen:

Typ a): $0=0$ ist klar, $Q=\mathbb{Z}_3^2$.

$x_1^2=0$:

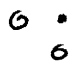
("Gerade")

$x_1^2-x_2^2=0$



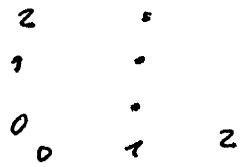
"Geradenpaar"

$x_1^2+x_2^2=0$



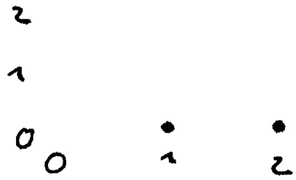
"Punkt"

b) $x_1^2=1$



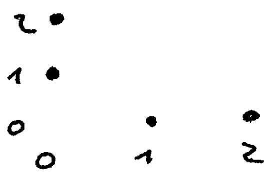
"paralleles Geradenpaar"

$x_1^2-x_2^2=1$



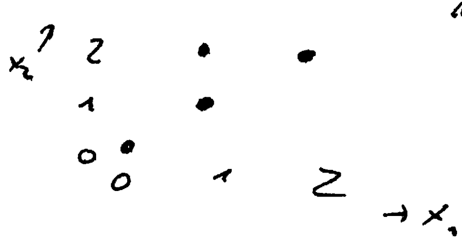
"Hyperbel"

$x_1^2+x_2^2=1$



"Kreis"

c) $x_1^2+2x_2=0$



"Parabel"

Mustr Lösg Blatt 9

Aufgabe 3c):

Wir verfahren wie bei 3b schritt für schritt.

1. Punkt: $A' := (a_{ij})$ mit $\frac{1}{2}\alpha_{ij} =: a_{ij} =: a_{ji}$

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_2$!

Lösg (die einzig mögliche bis auf Permutation):

$$\alpha_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = 0$$

$$\alpha_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} + 1 \in \{0,1\}.$$

beliebige Wahlmöglichkeit.

Dann beschreibt also A' die Quadrik Q wie gewünscht.

2. Punkt: A' ist nicht symmetrisch (Es sei denn $A = 0$!), und damit im allgemeinen nicht diagonalisierbar. Diese Diagonalisierbarkeit ist (wäre) aber nötig, um wie im Fall $\mathbb{R}$ beschrieben die "gemischten Terme zu reduzieren", denn dies geht gerade nur weil A im Fall diagonalisierbar ist!

Musterlösung Blatt 9

Aufgabe 4:

a) A, B beschreiben Q_A, Q_B, also

$$x^T A x = 0 \quad , \quad y^T B y = 0$$

$$C = \lambda A + \mu B$$

$$\Rightarrow z^T C z = z^T \lambda A z + z^T \mu B z$$

$$= \lambda z^T A z + \mu z^T B z$$

$$= 0 \quad \text{falls} \quad z^T A z = 0 = z^T B z$$

also ist $Q_C \supset Q_A \cap Q_B$.

b) Es gibt 8 Normalformen im $\mathbb{R}^2$, wovon Typ a) 1. ignoriert werden können, also $Q = \mathbb{R}^2$.

Die Aussage ist so offensichtlich falsch,
denn man könnte ~~sich~~ ein paralleles Geradenpaar mit einem Geradenpaar mit Schnittpunkt schneiden, und erhält als Schnitt dann eine Menge bestehend aus einer Gerade und einem Punkt. (Ebenso und noch leichter sieht man dies, wenn man einen Kreis mit einer nicht tangential verlaufenden Gerade schneidet und 2 Punkte erhält.)

Von diesen Problemen zusätzlich störender Punkte abgesehen, können folgende Schnitte vorkommen:

Tabelle entsprechend der Normalform auf Seite 73.

	Typ a)1	a)2	a)3	a)4	b)1	b)2	b)3	c)
Typ a)1	a)1							
Gerade a)2	a)2	Gerade, $\emptyset$, ~~1~~ 2 Pkt, $\emptyset$						
a)3	a)3	$\emptyset$, ~~[illegible]~~ 1-2 Pkt Gerade,						
a)4	a)4	$\emptyset$. a)4.						
b)1	b)1	$\emptyset$, 2 Pkt, Gerade						
b)2	b)2	$\emptyset$, 1-2 Pkt						
b)3	b)3	$\emptyset$, 1-2 Pkt						
c)	c)	$\emptyset$ 1-2 Pkt						

etc.

Nun ist noch zu sehen, dass 2 Pkt keine Quadrik sind, dieser Fall also ebenso ignoriert werden kann, wie der Fall wo wir zusätzlich zu ein Gerade noch einen Pkt haben.

~~$\emptyset$ wird nicht aufgeführt, zwecks Platzmangel~~

4c) Wir können $C = A + \mu B$ setzen, und wählen μ so, dass $\det(A + \mu B) = 0$, denn dann haben wir eine "entartete" Quadrik. $\det(A + \mu B)$ ist ein Polynom 3-ten Grades in μ und hat somit eine Nst. sicher.

Also gibt es solch ein μ sodass $Q_{A+\mu B}$ entartet ist.

Was bedeutet nun, dass $Q_{A+\mu B}$ entartet ist?

Fall a)1: $Q_{A+\mu B} = \mathbb{R}^2$ trivial, da dann $A = B = 0$.

a)2: $Q_{A+\mu B}$ Gerade $\Rightarrow$ affin

etc.

Hierbei bleibt zu beachten, dass Hyperbel und Kreis nicht-entartet sind, also nicht betrachtet werden müssen.

4 d) Aussage ist falsch, siehe Bsp mit Q_A Geradenpaar und Q_B Paar paralleler Geraden.

Idee war:

Man benutze 4 c) und erhält eine Quadrik Q_C, die entartet ist und $Q_A \cap Q_B$ enthält.

Die Klassifikation ergibt nun, dass Q_C entweder $\mathbb{R}^2$, eine Gerade, ein Geradenpaar, ein Punkt, ein paralleles Geradenpaar ist.

[Hier ist leider der Fall $Q_C = \mathbb{R}^2$ das Problem!]

Für alle Fälle außer $Q_C = \mathbb{R}^2$ kann man nun diesen Durchschnitt $Q_A \cap Q_B \cap Q_C$ geometrisch betrachten, und sieht, dass für diese die Aussage gilt. (Notfalls wieder durch Abarbeiten aller Fälle)

Neue Musterlösung für (4 b)

Es geht hier um $\mathbb{R}^3$, wir haben also mehr Fälle zu betrachten.
Das Problem bleibt aber weiterhin, dass natürlich prinzipiell der Schnitt eines parallelen Ebenenpaars mit einem ~~Ebenen~~paar mit Schnittgerade einen Schnitt bildet, der keine Quadrik ist.

Allerdings ist ja auch zu zeigen:

$$\underline{zz}: \left\{ Q_1 \cap Q_2 \text{ ist Quadrik} \iff \begin{array}{l} Q_i \subset Q_j \text{ für } i \neq j \\ \text{oder} \\ Q_1 \cap Q_2 \text{ ist affiner UR.} \end{array} \right.$$

" $\Longleftarrow$ " ist trivial.
bleibt noch " $\Longrightarrow$ ", durch betrachten der Tabelle.
Dabei sieht man dann, dass Schnitte von Zylinder ect mit Ebenen nur dann eine Quadrik ergibt, wenn der Schnitt affin ist.
(Insbesondere sind in $\mathbb{R}^3$ ~~paar~~ Geradenpaare keine Quadrik!)