Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Staudacher

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE II* SS 2012

ÜBUNGSBLATT 11, Abgabe spätestens bis in der VL am Do. 5.07. um 13.15 Uhr

1 [Die komplexe projektive Gerade] Sei die zweidimensionale Sphäre definiert als $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1\}$. Sei die Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(z_1, z_2) \mapsto \frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \left(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2, i(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2 \right).$$

Zeigen Sie, dass f auf natürliche Weise eine wohldefinierte Bijektion $\tilde{f} : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to S^2$ liefert.

(3 Punkte)

2 [Die projektive lineare Gruppe] Wir definieren auf $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ mit $x = \lambda y$, wobei $\mathbb{K}$ einer beliebiger Körper ist. Auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K}) := \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})/\sim$ definieren wir die Verknüpfung $\cdot$ durch

$$[A] \cdot [B] := [AB] \quad \text{wobei } [A], [B] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}).$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K}), \cdot)$ eine Gruppe ist.

b) $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{K})$ wirkt auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ durch $[A](\mathbb{K}v) = \mathbb{K}(Av)$. Zeigen Sie, dass diese Operation transitiv und treu ist. Eine Gruppenoperation von G auf X heißt treu, wenn aus $g \cdot x = x \; \forall x \in X$ folgt $g = e$.

(4 Punkte)

3 [Projektive Unterräume und Quadriken] Sei Q eine reelle projektive Quadrik in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

$$Q := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : x^t \cdot A \cdot x = 0\},$$

wobei A eine reelle symmetrische Matrix ist. Sei $U \subset Q$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, der in Q enthalten ist (siehe auch [F3], Seite 197). Zeigen Sie:

$$\dim(U) \leq u(Q) := n - \frac{1}{2} \left(\mathrm{Rang}(A) + |\mathrm{Sign}(A)| \right).$$

Hinweis: $\mathrm{Sign}(A) := |\{\lambda \text{ EW von } A : \lambda > 0\}| - |\{\lambda \text{ EW von } A : \lambda < 0\}|$.

(6 Punkte)

4 [Möbius Transformationen] Wir identifizieren $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Projektive Abbildungen $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ entsprechen Möbius Transformationen

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \text{ wobei } ad - bc \neq 0.$$

a) Bestimmen Sie explizit diejenige(n) Möbius Transformation(en), die drei verschiedene Punkte $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf $0, 1, \infty$ abbildet, beziehungsweise abbilden.

b) Bestimmen Sie explizit diejenige(n) Möbius Transformation(en), die drei verschiedene Punkte $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf drei verschiedene Punkte $z_0', z_1', z_2' \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ abbildet, beziehungsweise abbilden.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ für $A, C \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{C}$ genau dann einen Kreis definiert, wenn $AC - |B|^2$ negativ ist.
Bemerkung: Ein Kreis durch ∞ ist eine Gerade.

d) Zeigen Sie, dass Möbius Transformationen Kreise auf Kreise abbilden.

(7 Punkte)